سیگنال و سیستم

(تجزیه و تحلیل سیستمها)

دکتر محمد هاشمی‌نژاد

فهرست مطالب

دیباچه

- مفاهیم مرتبط با این درس در زمینه‌های گوناگونی از علوم و فناوری کاربرد دارند؛ زمینه‌هایی نظیر انتقال داده، طراحی مدار، هوانوردی، مهندسی پزشکی، سیستمهای توزیع قدرت، مهندسی کنترل، پردازش تصویر، صوت و ویدئو
- هرچند ذات کاربردهای گفته شده در بالا با هم متفاوت است، در دو مفهوم اشتراک دارند: « سیگنال و سیستم »

کاربردها

- در بسیاری از کاربردها میخواهیم بدانیم پاسخ یک سیستم به یک سیگنال چگونه است
  - پیشبینی قیمت سهام بر اساس سیستم اقتصادی
  - پاسخ یک مدار به یک سیگنال ورودی
- در مواردی می‌خواهیم سیستمی طراحی کنیم که به سیگنالهای خاص پاسخ مشخصی داشته باشد.
  - طراحی سیستمی برای بازیابی سیگنال
  - ارتقاء کیفیت سیگنال(سیگنالهای تصویر)
- بهبود کارایی یک سیستم توسط ترکیب با سیستمهای دیگر

- بارم بندی
  - تکالیف ۱۵%
  - کوییزها ۱۰٪
  - میان ترم ۲۵ – ۳۰٪
  - پایان ترم ۴۰-۵۰%
  -

توجه: بارم بندی فوق تقریبی است و با توجه به شرایط قابل تغییرات است.
تحویل ندادن تکالیف و شرکت نکردن در کوییزها نمره‌ی منفی دارد

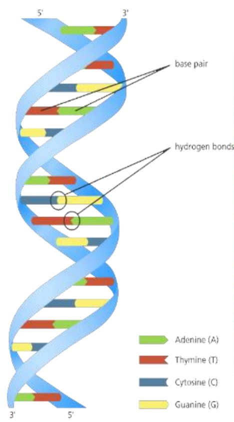
منابع

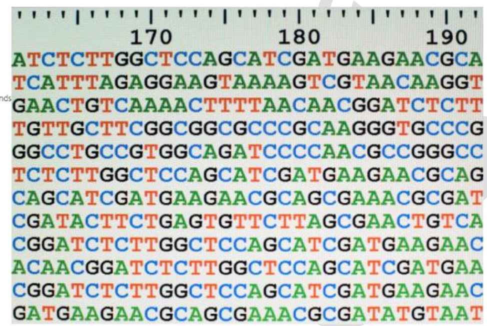
- Signals and Systems, Oppenheim & Willsky
- Signals and Systems, Haykin & Van Veen
- برای این درس از منابع online مانند اسلایدهای MIT نیز استفاده شده است

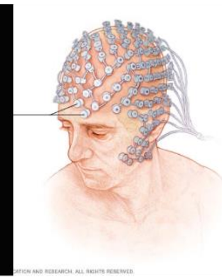
فصل اول(سیگنال و سیستم)

سیگنال چیست؟

- سیگنال تابعی از متغیرهای مستقل حاوی اطلاعات در مورد یک پدیده‌ی فیزیکی است، مانند:
  - سیگنالهای الکتریکی: جریان و ولتاژ
  - سیگنالهای صوتی: سیگنال صحبت که هم می‌تواند به صورت آنالوگ و یا دیجیتال باشد
  - سیگنالهای ویدئویی: میزان روشنایی پیکسل‌ها در یک فریم از ویدئو
  - سیگنالهای زیستی: سیگنالهای مغزی، سیگنالهای قلب







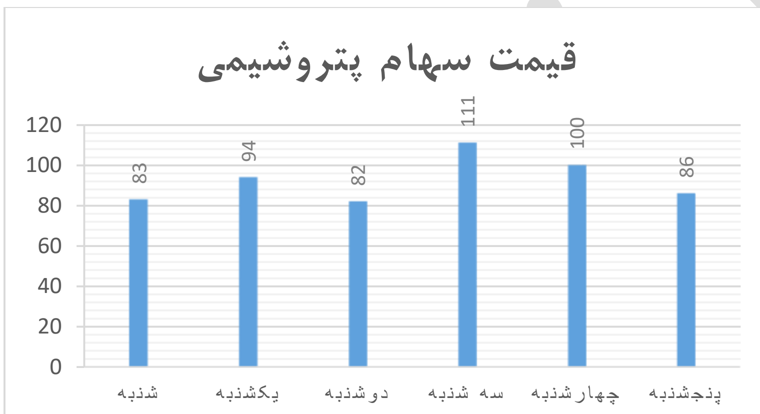
- این متغیرهای مستقل می‌توانند پیوسته و گسسته باشند.

سیگنالهای پیوسته

- بیشتر سیگنالهای فیزیکی از نوع «پیوسته» هستند:
  - سیگنال صوتی
  - سرعت
  - دما
  - میزان رطوبت
  - مسیر حرکت یک موشک

سیگنالهای گسسته

- برخی سیگنالها ماهیتی گسسته دارند:
  - شاخص سهام در هر روز
- برخی با نمونه برداری از سیگنالهای پیوسته به دست می‌آیند.
  - تصاویر دیجیتال
- چرا از سیگنالهای گسسته استفاده می‌شود؟
  - این سیگنالها قابلیت پردازش توسط کامپیوترهای پیشرفته و DSPها را دارند.

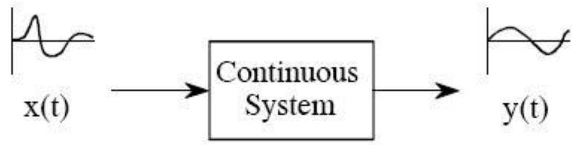


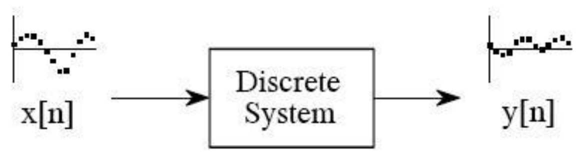
ابعاد سیگنال

- سیگنال‌ها می‌توانند یک بعدی، دو بعدی، ... و n بعدی باشند
  - سیگنال یک بعدی: سیگنال صوت
  - سیگنال دو بعدی: تصویر
- در این درس تمرکز ما بر روی سیگنالهای یک بعدی است.
- این اصول برای استفاده در سیگنالهای چند بعدی قابل تعمیم هستند.

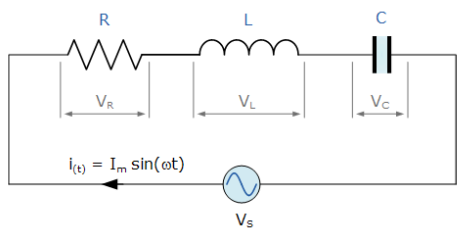
سیستم

- یک سیستم، در پاسخ به یک سیگنال ورودی، یک سیگنال به عنوان خروجی دارد.
- مشخصات سیستم بر سیگنال خروجی اثر گذار است.



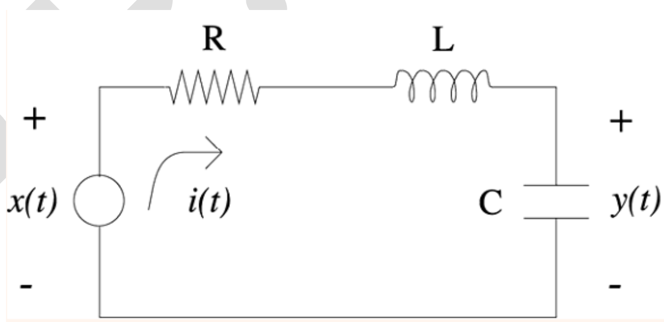


مثالهایی از سیستم



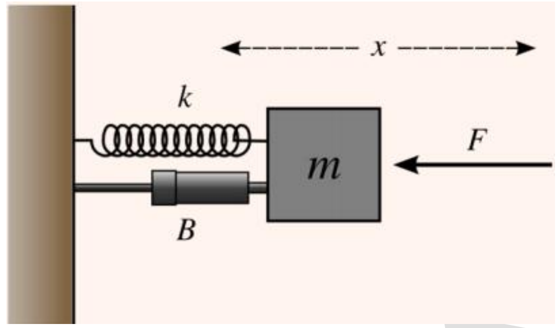
- یک مدار RLC
- یک سیستم کنترلی
- سیستم حذف نویز از صدا
- سیستم حذف اکو از صدا
- الگوریتم پیشبینی قیمت سهام
- یک تشخیص دهنده‌ی لبه در تصاویر دیجیتال
- یک بهبود دهنده‌ی کیفیت تصویر
- یک فشرده ساز تصویر یا ویدئو

یک مدار RLC



$$\begin{cases} Ri(t) + L\dfrac{di(t)}{dt} + y(t) = x(t) \\ i(t) = C\dfrac{dy(t)}{dt} \end{cases} \Rightarrow LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

یک سیستم مکانیکی(جرم - فنر - میراگر)

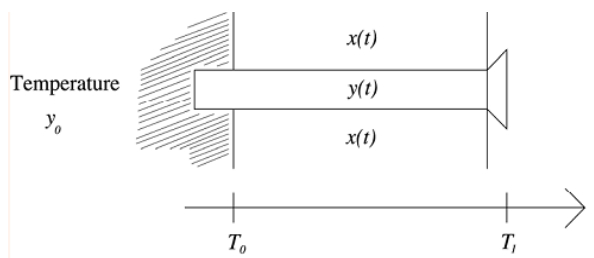


$x(t)$ - نیروی وارده
K - ثابت فنر
D - ثابت میرایی
$y(t)$ - جابجایی از نقطه ایستا

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = x(t) - Ky(t) - D\frac{dy(t)}{dt} \Rightarrow$$
$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + D\frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = x(t)$$

یک سیستم فیزیکی کاملا متفاوت، دارای مدل ریاضی کاملا یکسانی است.

یک سیستم حرارتی



t: فاصله در طول میله
$y(t)$: دمای مرکز میله بر حسب موقعیت
$x(t)$: دمای اطراف میله برحسب فاصله از نقطه ۰

متغیر مستقل سیگنال می‌تواند چیزی جز زمان باشد، به عنوان نمونه مکان

یک سیستم آشکارساز لبه

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n+1] - 2x[n] + x[n-1] \\ &= \{x[n+1] - x[n]\} - \{x[n] - x[n-1]\} \\ &= \text{“Second difference”} \end{aligned}$$

توان و انرژی سیگنال

- انرژی سیگنال زمان پیوسته: $E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$
- انرژی سیگنال زمان گسسته: $E = \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$
- انرژی کلی سیگنال: $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$
- توان کلی سیگنال: $P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$

مثال : توان سیگنال $x(t) = \cos(5t)$ را بدست آورید.

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |\cos(5t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |(\cos(5t))^2| dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left|\frac{1+\cos(10t)}{2}\right| dt \overset{\cos(x)\geq -1}{\cong} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1+\cos(10t)}{2} dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{20}\sin(10t)\right)\Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\right)$$

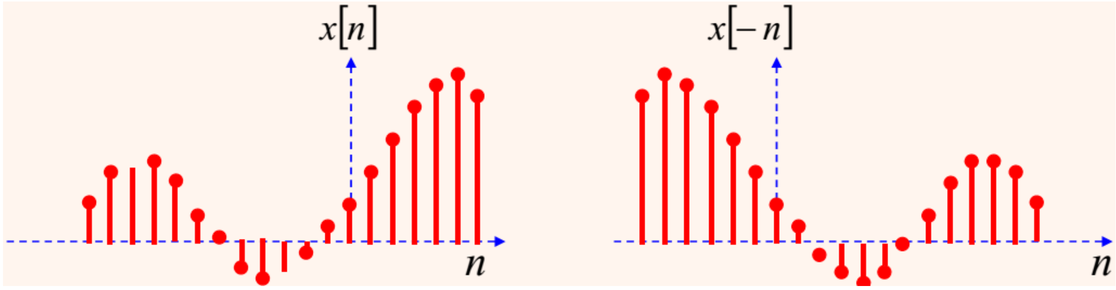
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2} + \frac{1}{20}(\sin 5T + \sin 5T)\right) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2} + \frac{1}{20}(2\sin 5T)\right)$$

$$= \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

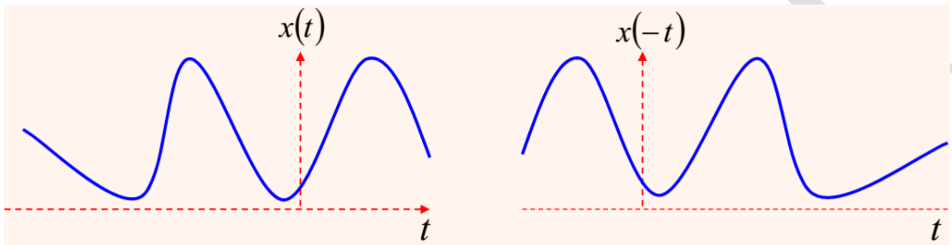
برای محاسبه‌ی توان، انرژی بر بازه‌ی زمانی تقسیم می‌شود. گسسته: $(n_1 - n_2 + 1)$، پیوسته: $(t_2 - t_1)$

تبدیل سیگنال – قرینه سازی

حالت گسسته: $x[n] \longrightarrow x[-n]$

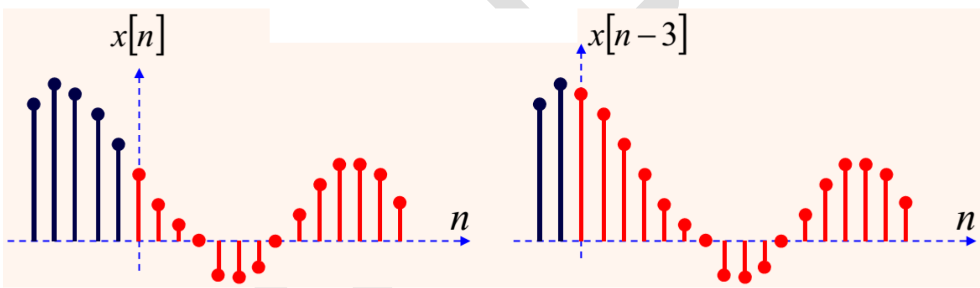


حالت پیوسته: $x(t) \longrightarrow x(-t)$

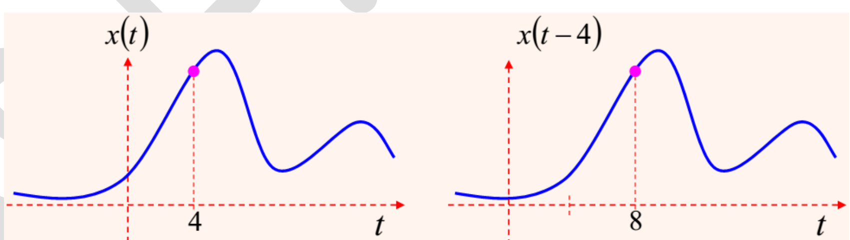


تبدیل سیگنال –انتقال

حالت گسسته: $x[n] \longrightarrow x[n-\alpha]$

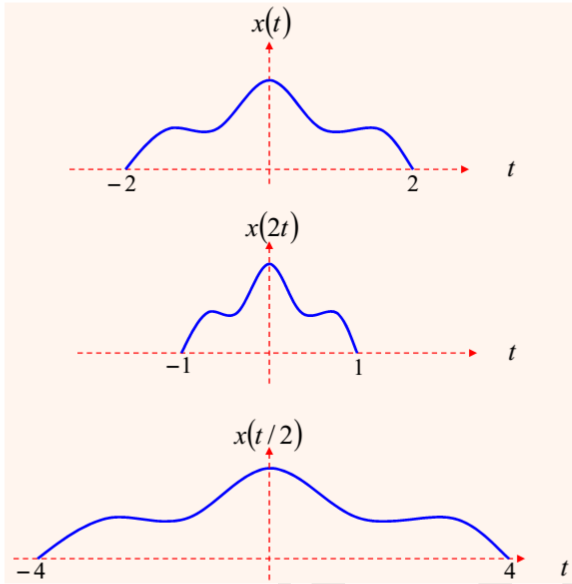


حالت پیوسته: $x(t) \longrightarrow x(t-\alpha)$

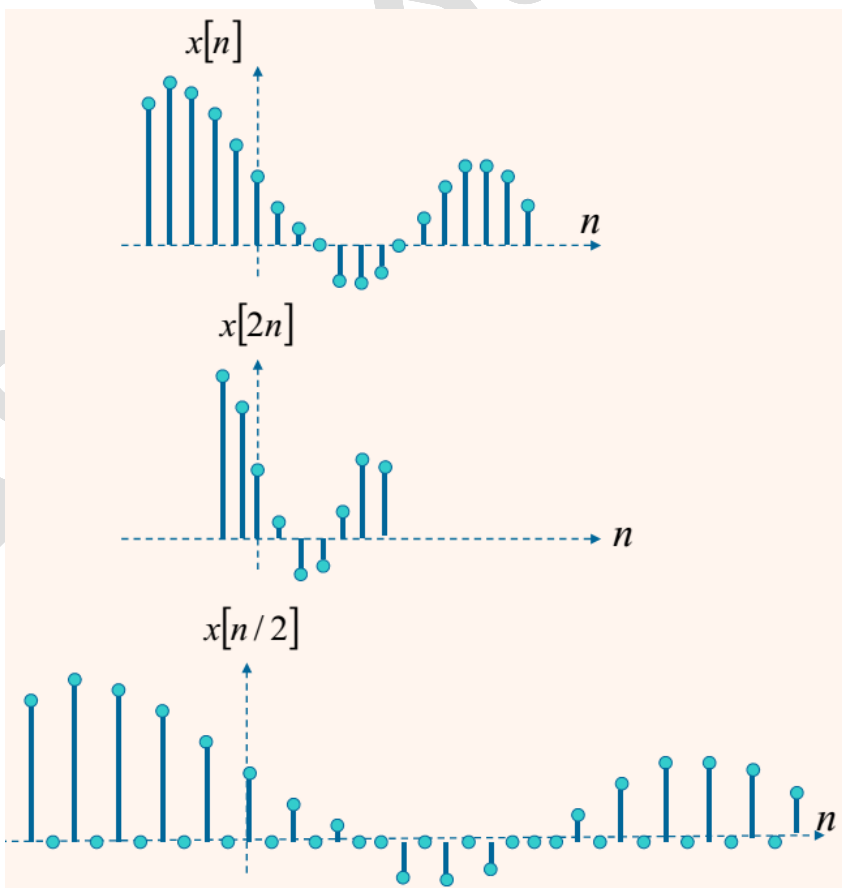


تبدیل سیگنال – فشرده سازی و گسترش

مثالی از حالت پیوسته:

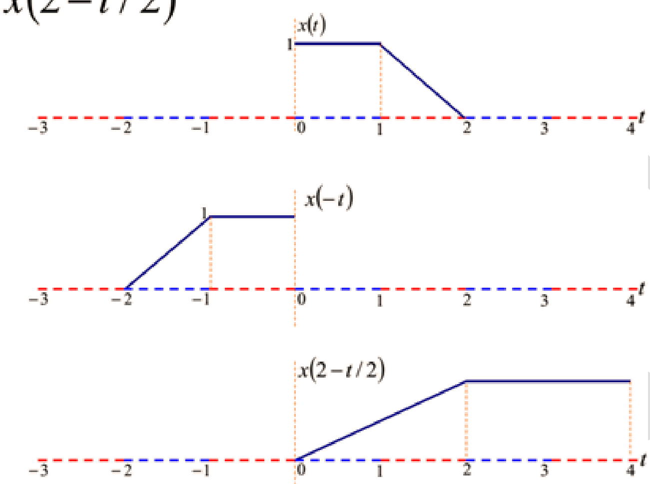


مثالی از حالت گسسته:



مثال: نمودار $x(t)$ در شکل زیر داده شده است. نمودار $x\left(2-\frac{t}{2}\right)$ را بدست آورید.(سؤال)

$x(2-t/2)$



$$x(-t) \to x\left(-\frac{t}{2}\right) \to x\left(-\frac{t-4}{2}\right) \to x\left(-\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{4}{2}\right)$$

ترکیب تبدیل‌ها

$$y(t) = x(\alpha t+\beta)$$

بررسی برخی نقاط خاص می‌تواند در یافتن تبدیل‌ها به ما کمک کند:

$$y(0) = x(\beta) \qquad y(-\beta/\alpha) = x(0)$$

از طرفی می‌توان اینگونه استدلال کرد: در تغییر مقیاس به جای t، αt قرار می‌دهیم، در حالی که شیفت زمانی مقدار t را با $t-\beta$ جایگزین می‌کنیم، از اینرو تغییر مقیاس اولویت دارد.

به گونه‌ای دیگر نیز می‌توان استدلال کرد:

$$y(t_0) = x(\alpha t_0+\beta)=x(t_x)$$

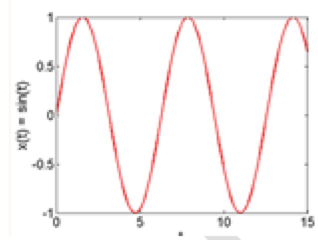
$$\alpha t_0+\beta=t_x \qquad t_0=(1/\alpha)(t_x-\beta)$$

سیگنالهای متناوب

یکی از مهمترین دسته از سیگنالها، سیگنالهای متناوب هستند.

where T_0>0, for all t. $x(t) = x(t + T_0)$

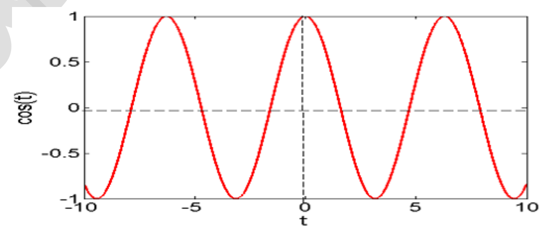
where N_0>0, for all n. $x[n] = x[n + N_0]$



$$\cos(t + 2\pi) = \cos(t), \quad \sin(t + 2\pi) = \sin(t)$$

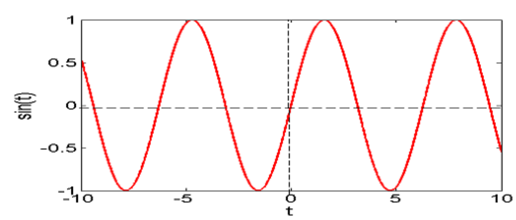
سیگنالهای زوج و فرد

سیگنالی زوج است که نسبت به محور عمودی متقارن باشد.



$x(-t) = x(t)$

سیگنالی فرد است که بخش سمت چپ محور عمودی منفی قرینه بخش سمت راست است. (قرینه نسبت به مبدأ مختصات)



$x(-t) = -x(t)$

مثال:

- x(t)= cos(t) زوج
- x(t)= sin(t) فرد
- x(t)= c زوج
- x(t)= t فرد

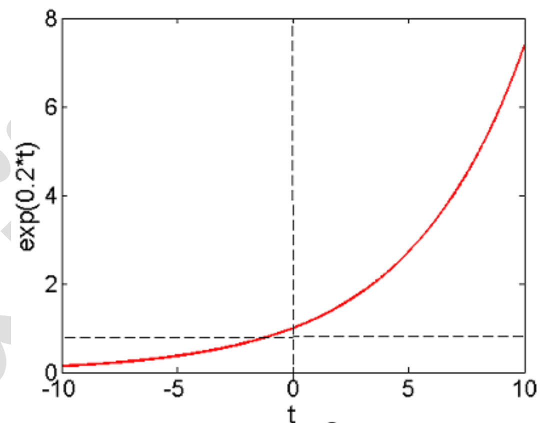
هر سیگنال را می‌توان به صورت مجموع یک سیگنال زوج و یک سیگنال فرد نوشت:

$$Ev\{x(t)\} = \frac{1}{2}\{x(t) + x(-t)\} \text{ و } Od\{x(t)\} = \frac{1}{2}\{x(t) - x(-t)\}$$

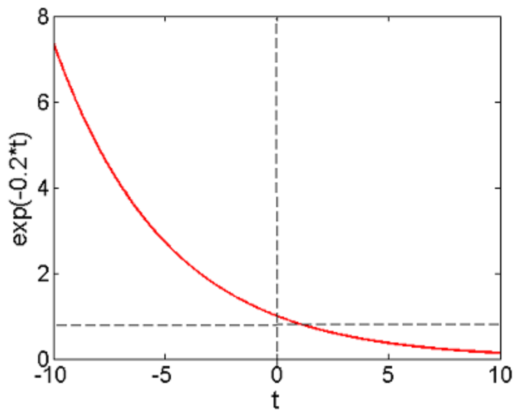
معرفی سیگنالهای پایه

سیگنالهای نمایی: در طبیعت بسیاری از سیگنالها به این صورت هستند. (تمرین: رسم نمایی در matlab)

$$x(t) = Ce^{at}$$



$$a > 0$$
$$C > 0$$



$$a < 0$$
$$C > 0$$

سیگنالهای نمایی و سینوسی

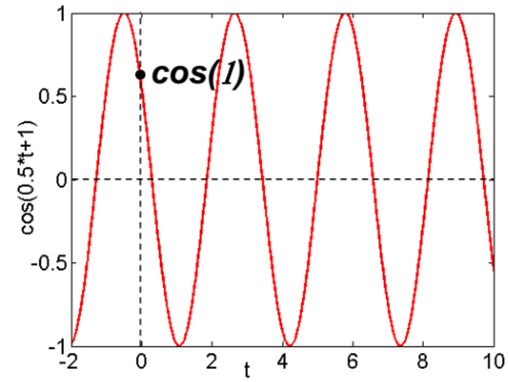
$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

$$e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t$$ رابطه اویلر

$$e^{j\omega_0 (t+T)} = \cos\omega_0 (t+T) + j\sin\omega_0 (t+T)$$
$$= \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t = e^{j\omega_0 t}$$

وقتی $T = 2\pi/\omega_0$

$$A\cos(\omega_0 t+\phi)=A\Re\left(e^{j(\omega_0 t+\phi)}\right)$$
$$A\sin(\omega_0 t+\phi)=A\Im\left(e^{j(\omega_0 t+\phi)}\right)$$



$$T_0 = 2\pi/\omega_0 = 4\pi$$

$$\omega_0 t = 0.5t \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t = 0.5t \Rightarrow T = \frac{2\pi}{0.5} = 4\pi$$

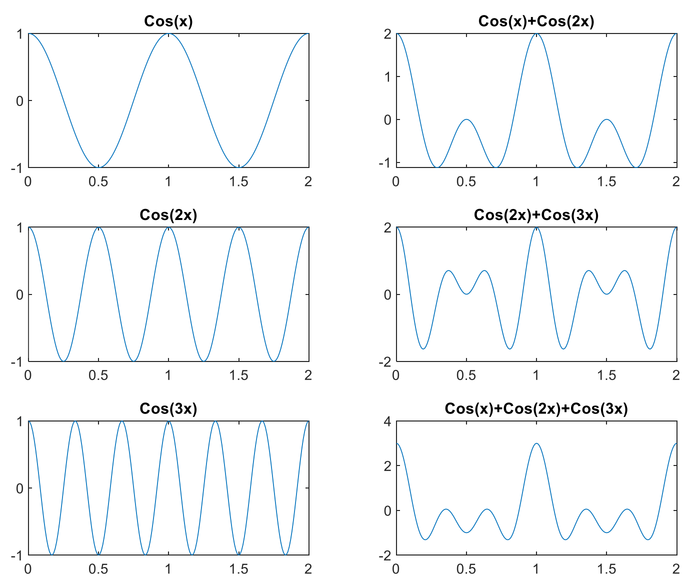
هارمونیک: می‌توان شکل موج غیر سینوسی حاصل را به مولفه‌های سینوسی با فرکانس های مختلف تجزیه کنیم که اگر این موجهای سینوسی با هم جمع شوند شکل موج اصلی حاصل می‌شوند. در شکل زیر این مطلب قابل مشاهده است.

از میان شکل موجهای سینوسی آن موجی که با شکل موج اصلی هم فرکانس است، هارمونیک اول - اگر فرکانسش دو برابر باشد هارمونیک دوم. اگر n برابر باشد هارمونیک n ام است.

$$\varphi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

در تحلیل سیگنالها این دسته از توابع نقش مهمی ایفا می‌کنند.

توابع فوق دارای یک دوره‌ی تناوب مشترک $\frac{2\pi}{\omega_0}$ هستند.



سیگنالهای سینوسی گسسته

سیگنال نمایی مختلط ارتباط نزدیکی با سیگنالهای سینوسی دارد.

$$x[n]=e^{j\omega_o n}$$

$$e^{j\omega_o n}=\cos\omega_o n+j\sin\omega_o n$$

$$A\cos(\omega_o n+\phi)=\frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_o n}+\frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_o n}$$

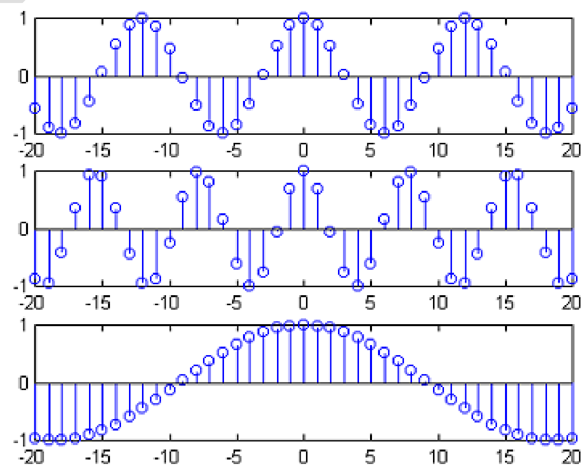
$$A\sin(\omega_o n+\phi)=\frac{A}{2j}e^{j\phi}e^{j\omega_o n}-\frac{A}{2j}e^{-j\phi}e^{-j\omega_o n}$$

چند مثال از سیگنالهای سینوسی گسسته:

$$x[n]=\cos(2\pi n/12)$$

$$x[n]=\cos(8\pi n/31)$$

$$x[n]=\cos(n/6)$$



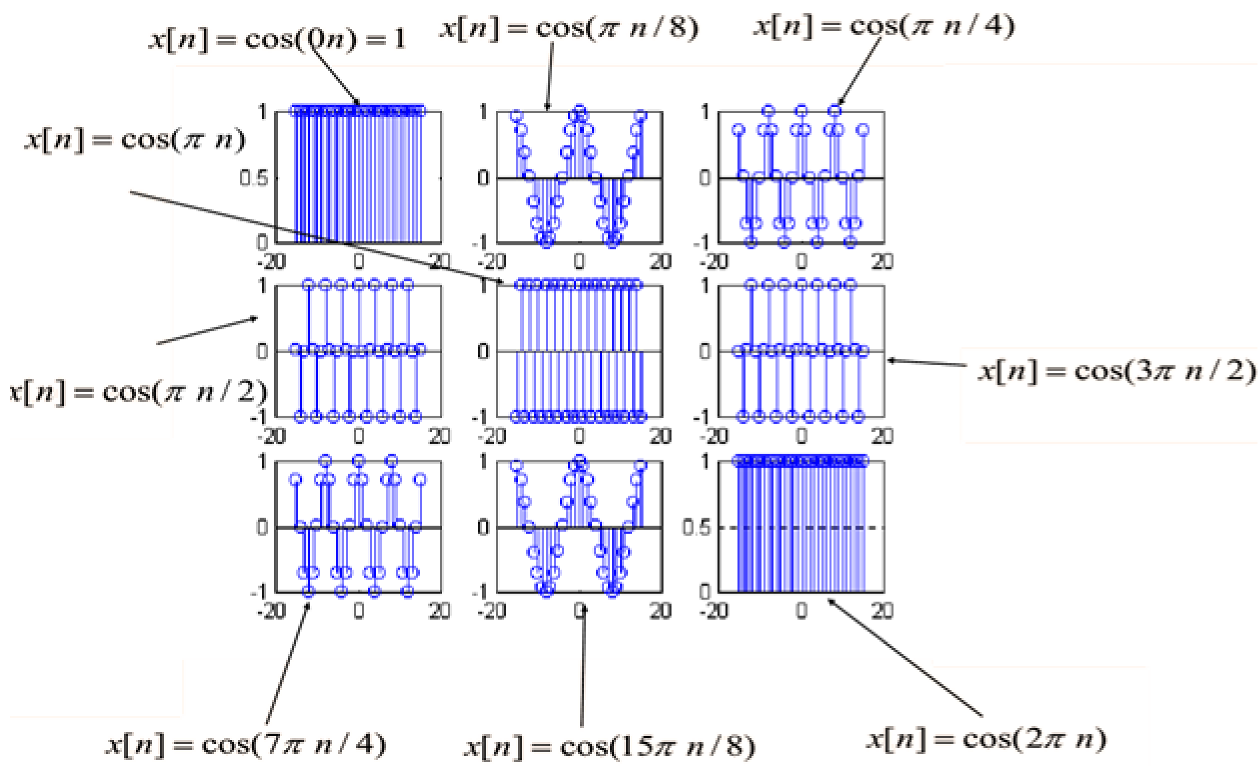
تناوب در سیگنالهای گسستهی سینوسی

- در سیگنالهای سینوسی پیوسته $e^{j\omega_0 t}$:
  - هرچه مقدار ω_0 افزایش یابد، سرعت تغییرات بیشتر خواهد شد.
  - به ازاء هر ω_0 سیگنال متناوب است.
- در سیگنالهای سینوسی گسسته $e^{j\omega_0 n}$:

$$e^{j(\omega_o+2\pi)n}=e^{j2\pi n}e^{j\omega_o n}=e^{j\omega_o n}$$

یعنی دو فرکانس ω_0 و $\omega_0 + 2\pi$ در عمل با هم برابر هستند!

تناوب در توابع گسسته‌ی سینوسی



دوره تناوب سیگنال‌های $e^{j\omega_0 n}$ بالا چیست؟

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n} \Longrightarrow e^{j\omega_0 N} = 1 \Longrightarrow \omega_0 N = 2\pi m \Longrightarrow \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$$

در صورتی که مقدار $\frac{\omega_0}{2\pi}$ برابر با یک عدد گویا باشد، سیگنال پریودیک است.

مثال: (سوال)

$\cos(\frac{2\pi n}{12})$ پریودیک است چون:

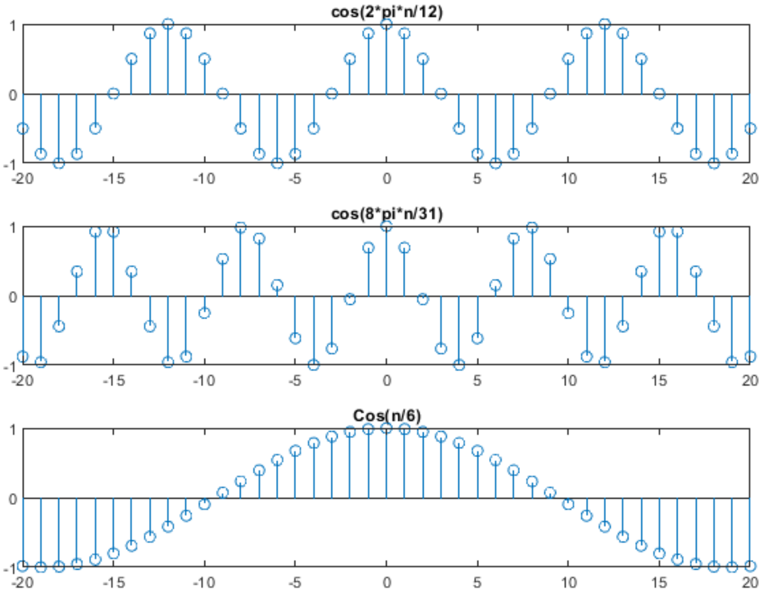
$$\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{1}{12}$$

$\cos\left(\frac{8\pi n}{31}\right)$ پریودیک است چون:

$$\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{4}{31}$$

$\cos(\frac{n}{6})$ پریودیک نیست چون:

$\frac{\omega_0}{2\pi}\neq$ عدد گویا



برای یک سیگنال نمایی گسسته متناوب رابطه ذیل برقرار است:

$\phi_k[n]=e^{jk(2\pi/N)n}, \text{for } k=0,\pm1,\ldots$ هارمونیک‌های سیگنال

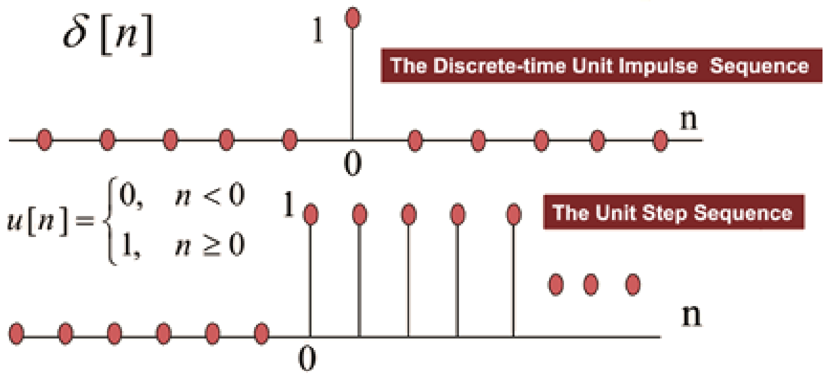
$$\phi_{k+N}[n]=e^{j(k+N)(2\pi/N)n}=e^{jk(2\pi/N)n}e^{j2\pi n}=\phi_k[n]$$

در نتیجه برای $\emptyset_k[n]$ها تنها N تا نمایی متناوب متمایز وجود دارد:

$$\phi_o[n]=1,\phi_1[n]=e^{j2\pi n/N},\phi_2[n]=e^{j4\pi n/N},\ldots\ldots\phi_{N-1}[n]=e^{j2\pi(N-1)n/N}$$

سیگنال‌های زمان گسسته:

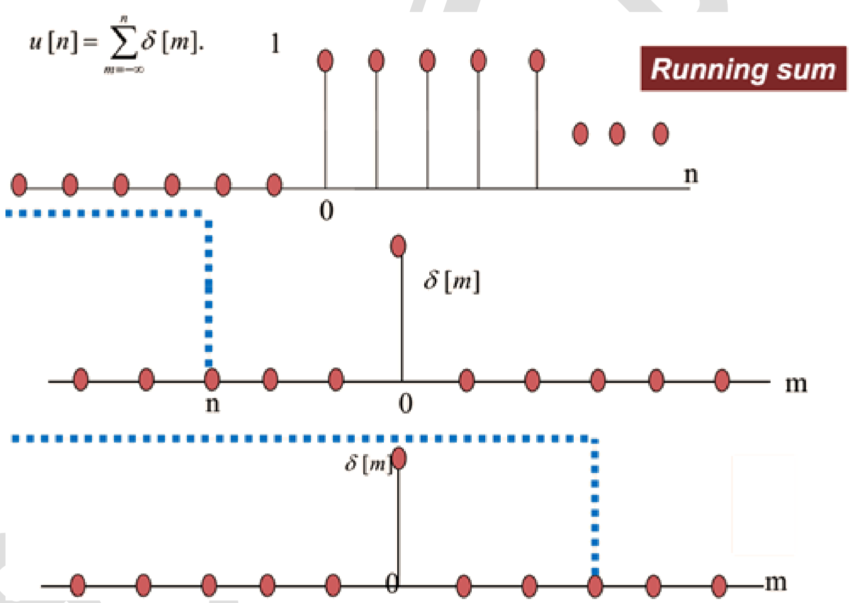
دو تا از مهمترین سیگنال‌های گسسته سیگنالهای ضربه واحد و پله واحد هستند.



$$\delta[n]=u[n]-u[n-1].$$

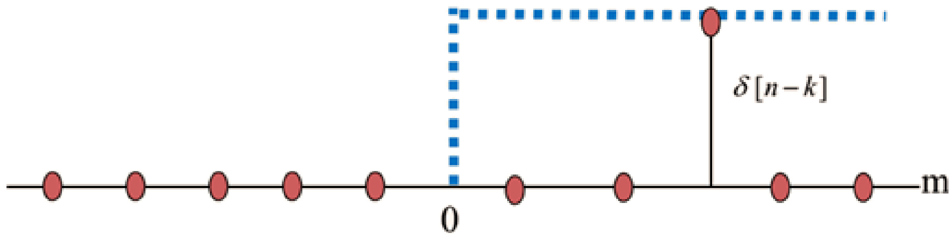
$$u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m].$$

می‌توان سیگنال پله واحد را به صورت جمع پیش رونده سیگنال ضربه نوشت:



اگر در فرمول $u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]$ تغییر متغیر بدهیم، $m=n-k$ متغیر جدید $k=n-m,$ است. پس با توجه به محدود بودن n به جای $m=-\infty$ می‌توانیم $k=\infty$ بگذاریم. همچنین در حد بالا n را داریم و وقتی در فرمول اولیه m که متغیر است برابر n شود $k=n-m=n-n=0$ می‌شود. پس:

$$u[n]=\sum_{k=\infty}^{0}\delta[n-k] \quad or \quad u[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]$$



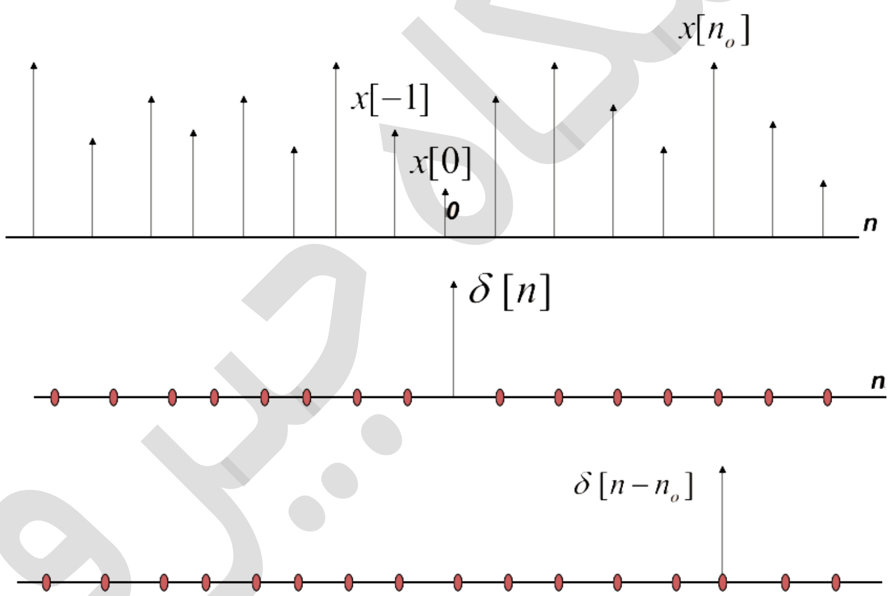
یکی از کاربردهای سیگنال ضربه استفاده در غربالگری (نمونه برداری) از یک سیگنال است. اگر یک سیگنال وارد یک سیستم غربالگری (نمونه برداری) شود، برخی از نقاط سیگنال ورودی در خروجی این سیستم ظاهر می‌شوند.

گرفتن نمونه از یک سیگنال در نقطه $n = 0$ با ضرب آن سیگنال در $\delta[n]$ انجام می‌شود:

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$$

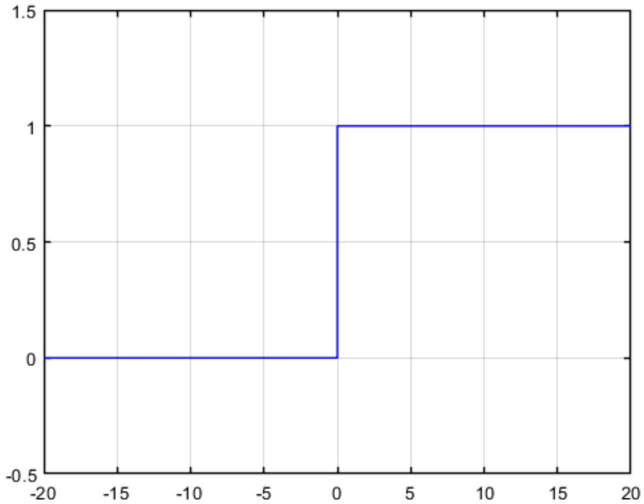
گرفتن نمونه از یک سیگنال در نقطه $n = n_0$ با ضرب آن سیگنال در $\delta[n - n_0]$ انجام می‌شود:

$$x[n]\delta[n - n_0] = x[n_0]\delta[n - n_0]$$



سیگنال‌های زمان پیوسته

سیگنال پله واحد: (تابع پله واحد در x=0 گسستگی دارد)



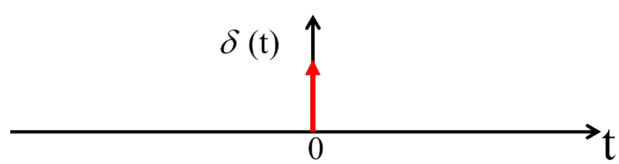
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

سیگنال ضربه واحد (*The continuous-time unit impulse*):

یکی از توابع پر کاربرد، سیگنال ضربه است که مرتبط با سیگنال پله است.

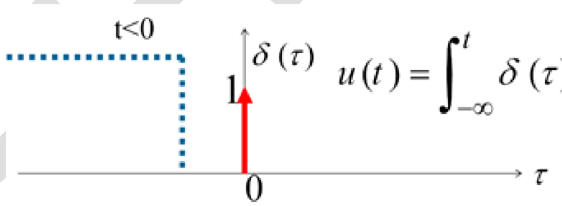
$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau \qquad \delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0, \\ 1(area), & t = 0, \end{cases}$$

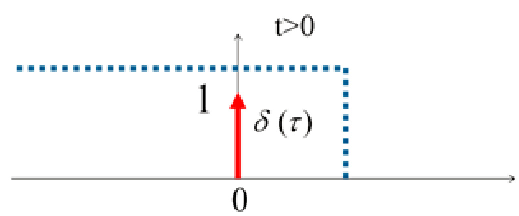
$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$



بازه انتگرال گیری:

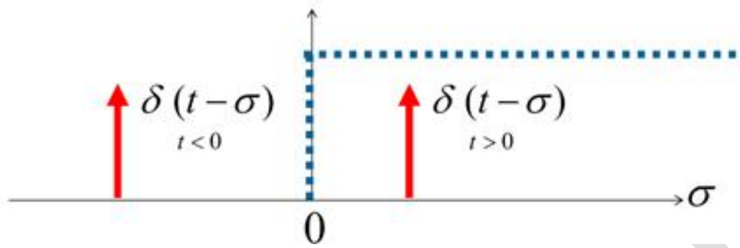
همانگونه که از شکل مشخص است، برای $t>0$ نتیجه انتگرال گیری یک می‌شود و برای $t<0$ صفر می‌شود.





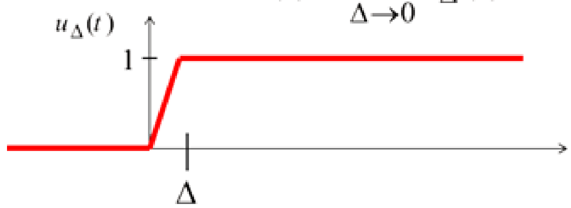
با تغییر متغیر دادن ($\tau = t - \sigma$):

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=\int_{\infty}^{0}\delta(t-\sigma)(-d\sigma),\quad u(t)=\int_{0}^{\infty}\delta(t-\sigma)d\sigma$$

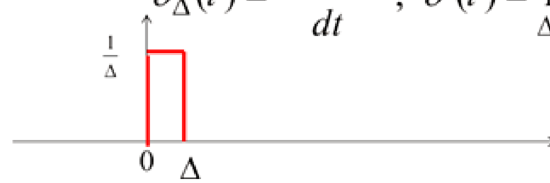


برای درک بهتر می‌توان مسئله را به گونه‌ای دیگر دید:

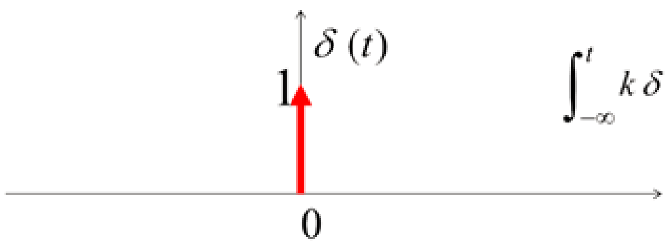
$$u(t)=\lim_{\Delta\to 0}u_\Delta(t)$$



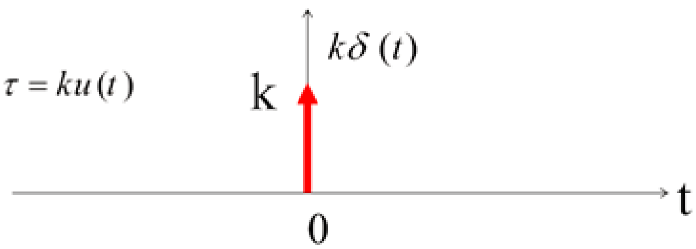
$$\delta_\Delta(t)=\frac{du_\Delta(t)}{dt},\quad \delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t)$$



تغییر مقیاس ضربه (*scaled impulse*)

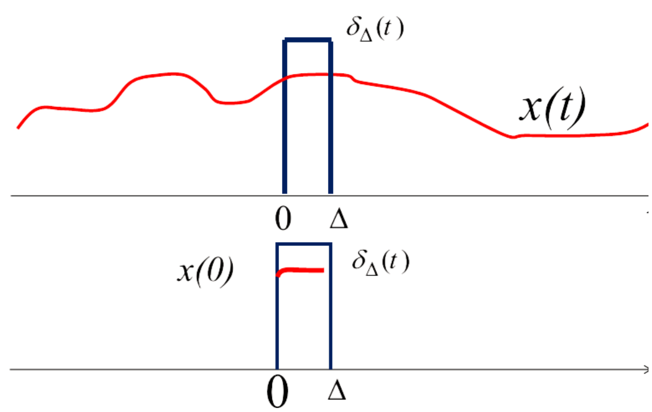


$$\int_{-\infty}^{t}k\delta(\tau)d\tau=ku(t)$$



نمونه برداری از یک سیگنال با ضرب آن در سیگنال ضربه:

عبارت زیر را در نظر بگیرید: $x_1(t)=x(t)\delta_\Delta(t)$



- اگر Δ به اندازه‌ی کافی کوچک در نظر گرفته شود:

$$x(t)\delta_\Delta(t)\approx x(0)\delta_\Delta(t)$$

$$Since\ \ \delta(t)=\delta_\Delta(t)\ \text{as}\ \Delta\to 0.$$

$$x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t)$$

- به صورت مشابه:

$$x(t)\delta(t-t_o)=x(t_o)\delta(t-t_o)$$

مثال : انتگرال گیری از تابع پله واحد

$$\int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau = \begin{cases} t, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} = tu(t)$$

سیستم‌ها و خواص آنها

دانشجویان کم و بیش با نام سیستم آشنا هستند. به عنوان مثالی از سیستم می‌توان یک ماهواره مخابراتی یا یک تلویزیون را نام برد.

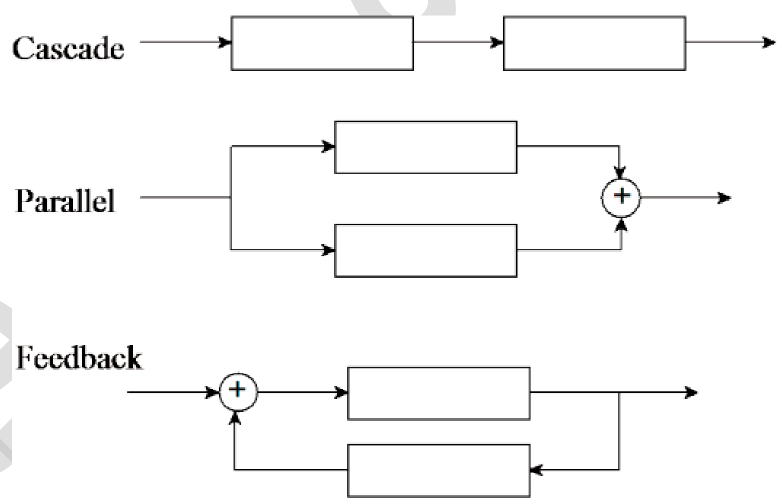
دو تعریف مختلف سیستم:

1- فرایندی که سیگنال خروجی آن با انجام تغییر و تحولاتی در سیگنال ورودی به دست می‌آید.
2- مجموعه منظم از اعضایی که به کمک یک دیگر هدف مشخصی را بر آورده می‌کنند.

اتصال بین سیستم‌ها

یکی از مباحث مهم تحلیل اتصال بین سیستم‌های مختلف است.

می‌توان با استفاده از زیرسیستم‌های ساده سیستم‌های پیچیده‌تر را درست کرد.



سیستم با حافظه –بی‌حافظه (سؤال)

• سیستمی «بی‌حافظه» است که خروجی آن در هر زمان تنها به ورودی در آن زمان وابسته باشد.

مثال:

– $y[n] = (2x[n]\text{-}x^2[n])^2$

– مقاومت یک عنصر بدون حافظه است.

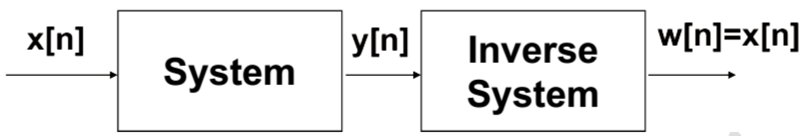
• سیستمی «باحافظه» است که خروجی به زمانی جز زمان حاضر بستگی داشته باشد.

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \qquad y[n]=x[n-1] \qquad y(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

معکوس پذیری

سیستمی معکوس پذیر است که به ازاء هر ورودی خاص و مجزا پاسخ خاص و مجزا بدهد. اگر معکوس یک سیستم به صورت سری با آن سیستم وصل شود، خروجی برابر ورودی می‌شود.

- $y(t)=2x(t)$ سیستم اصلی
- $w(t)=y(t)/2$ سیستم معکوس

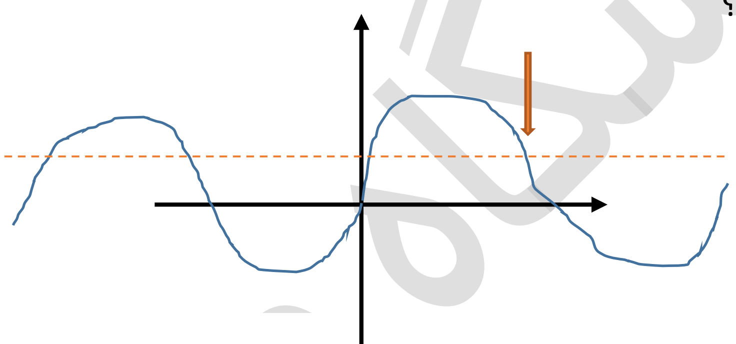


آیا سیستم زیر معکوس پذیر است؟

$$y[n]=2$$

$$y[n]=x^2[n]$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$



$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]+x[n], \qquad y[n]=y[n-1]+x[n], x[n]=y[n]-y[n-1]$$

$$w[n]=x[n]=y[n]-y[n-1]$$ سیستم معکوس

سیستم‌های علّی Causality

سیستمی« علّی » (causal) است که خروجی آن به ورودی‌های زمان گذشته تا کنون بستگی دارد، در واقع سیستم غیرعلی به نوعی ورودی‌های آینده را پیش‌بینی می‌کند.

- تمام سیستمهای فیزیکی، علی هستند. چون زمان به سمت جلو حرکت می‌کند .
- تصور کنید، یک سیستم پیش‌بینی قیمت سکه، که به داده‌های روزهای آینده وابسته باشد!
- چنین مفهومی در مورد سیگنالهای مکانی مطرح نمی‌شود، همچنین در مورد سیگنالهای ذخیره شده مطرح نمی‌شود. به عنوان مثال در پردازش تصویر، علیت اهمیت ندارد، چرا که متغیر مستقل سیگنال از جنس زمان نیست.

سیستمهای علی –تعریف ریاضی

- یک سیستم ($x(t)\rightarrow y(t)$) علّی است، اگر:

وقتی $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$، $x_2(t) \rightarrow y_2(t)$ و $x_1(t) = x_2(t)$ برای همه $t \leq t_0$ آنگاه:
$y_1(t) = y_2(t)$ برای همه $t \leq t_0$

چنین سیستمی از قانون علیّت تبعیت می‌کند.

مثال: کدام یک از سیستم‌های زیر علّی هستند؟

$y(t) = x^2(t-1)$ 

$y(t) = x(t+1)$ 

$y[n] = x[-n]$ 

$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} x^3[n-1]$ 

پایداری

سیستمی «پایدار» است که پاسخ آن به یک ورودی محدود واگرا نباشد. به عبارت دیگر ورودی محدود منجر به خروجی محدود می‌شود.

مثال: سیستم زیر پایدار نیست:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

سیستم‌های تغییر ناپذیر با زمان (Time Invariance (TI)) (سؤال)

یک سیستم «تغییرناپذیر با زمان» است، چنانچه عملکرد آن وابسته به زمان نباشد. پاسخ سیستم به ورودی یکسان، مستقل از زمان، خروجی ثابتی باشد. سیستم گسسته (x[n]→y [n]) تغییر ناپذیر با زمان است،

- اگر $x[n] \rightarrow y[n]$ آنگاه $x[n-n_0] \rightarrow y[n-n_0]$
- اگر $x(t) \rightarrow y(t)$ آنگاه $x(t-t_0) \rightarrow y(t-t_0)$

مثال:

$y(t) = x^2(t+1)$

$$x(t-t_0+1)x(t-t_0+1) = x^2(t-t_0+1), y(t-t_0) = x^2(t-t_0+1)$$

تغییر ناپذیر با زمان

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} x^3[n-1]$$

اگر ورودی $x_2[n] = x[n-n_0]$ باشد آنگاه خروجی برابر است با: $y_2[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} x^3[n-n_0-1]$، از طرفی: $y[n-n_0] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0+1} x^3[n-n_0-1]$ که این دو با هم برابر نیستند پس سیستم تغییر پذیر با زمان است

$y(t) = \sin[x(t)]$ تغییر ناپذیر با زمان

$y[n] = nx[n]$ تغییر پذیر با زمان

سیستم‌های خطی و غیر خطی

بسیاری از سیستمها عملکردی غیرخطی دارند، مانند برخی المانهای مدار (دیود، ترانزیستور) سیستمهای اقتصادی و دینامیک هواپیما. با این وجود تمرکز ما بر روی «سیستمهای خطی» است.

- بیشتر سیستمهایی که با آنها سر و کار داریم، خطی هستند. (در مدارهای الکتریکی مقاومت، خازن و سلف)
- پیش‌بینی عملکرد سیستمهای خطی ساده‌تر است.
- برای تحلیل برخی سیستمهای غیرخطی، در محدوده‌هایی، خطی سازی انجام می‌شود. (عملکرد سیستم در این محدوده، خطی در نظر گرفته می‌شود.)

سیستم‌های خطی

یک سیستم خطی است در صورتی که دارای خاصیت superposition باشد:

- (جمع‌پذیری و همگن بودن)
  - اگر $x_1(t) \to y_1(t)$ و $x_2(t) \to y_2(t)$ آنگاه:
    - $ax_1(t) + bx_2(t) \to ay_1(t) + by_2(t)$

مثال:

$y[n] = x^2[n]$ غیر خطی، تغییر ناپذیر با زمان، علّی

$y(t) = x(2t)$ خطی، تغییر پذیر با زمان، غیر علّی

اصل جمع آثار (Superposition):

$$if\ x_k[n] \to y_k[n] \quad then\ \sum_k a_k x_k[n] \to \sum_k a_k y_k[n]$$

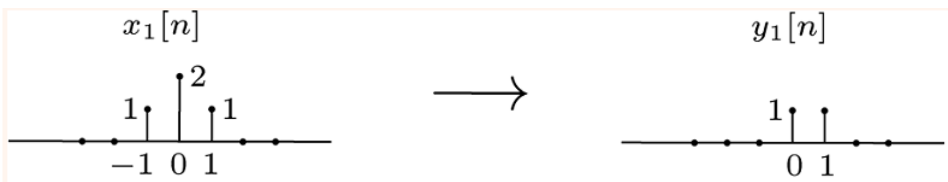
در یک سیستم خطی پاسخ ورودی صفر همواره صفر خواهد بود:

$$0 = 0 \times x[n] \rightarrow 0 = 0 \times y[n]$$

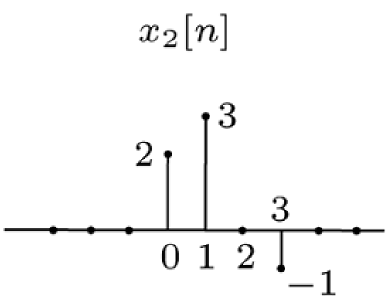
فصل دوم (خواص سیستمها)

در ادامه بر روی سیستم‌های خطی و تغییر ناپذیر با زمان (LTI) تمرکز می‌کنیم. بسیاری از سیستم‌های فیزیکی به این صورت مدل می‌شوند. چنین سیستمی را می‌توان به راحتی و با دقت تحلیل کرد.

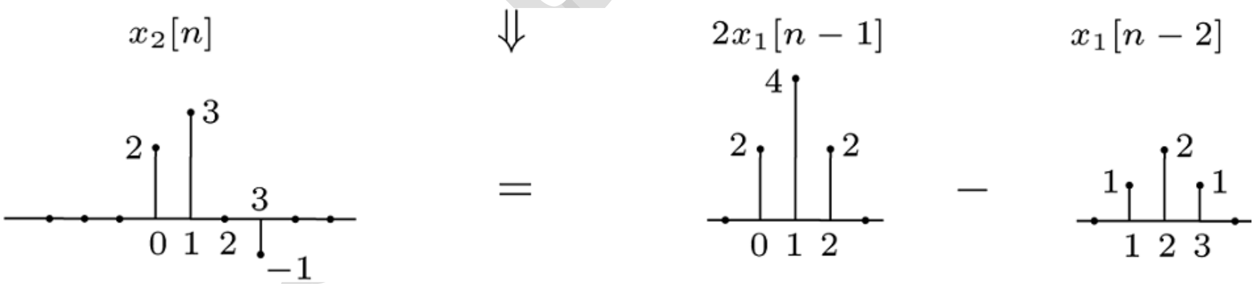
مثال: سیستم زمان گسسته LTI زیر را در نظر بگیرید:



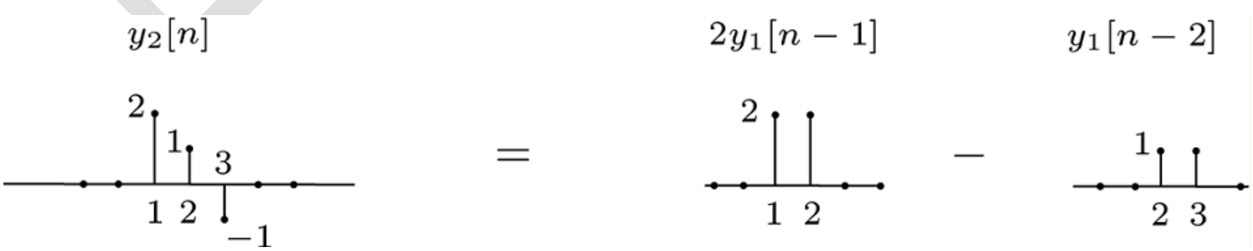
خروجی سیستم به ازاء ورودی $x_2[n]$ چقدر است؟



جواب: سیگنال‌های $x_1[n]$ و $x_2[n]$ با هم رابطه زیر را دارند:



در نتیجه با استفاده از اصل جمع آثار داریم:

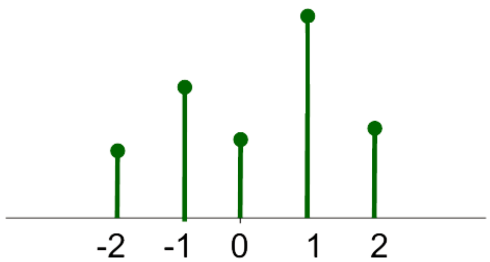


در صورتی که بتوانیم یک سیگنال را بر اساس یک سری سیگنال‌های پایه بنویسیم، برای به دست آوردن پاسخ سیستم کافی است پاسخ سیستم به سیگنال‌های پایه را محاسبه کنیم.

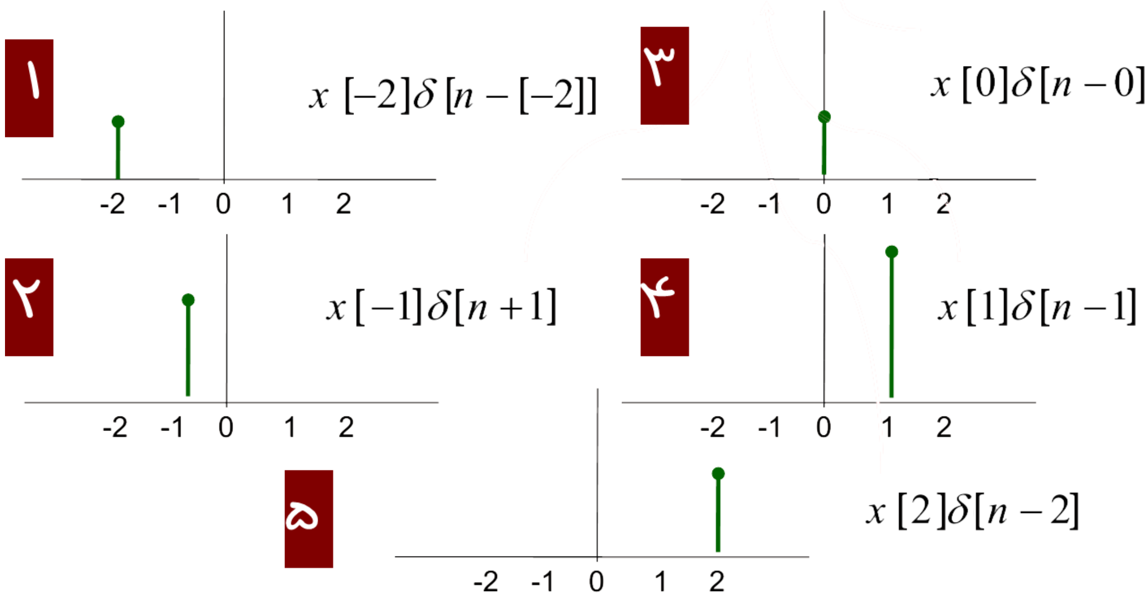
$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n] = a_1x_1[n] + a_2x_2[n] + a_3x_3[n] + \cdots$$

$$y[n] = \sum_k a_k y_k[n] = a_1y_1[n] + a_2y_2[n] + a_3y_3[n] + \cdots$$

سیگنال گسسته زیر را در نظر بگیرید:



می‌توان این سیگنال را به صورت مجموع وزن دار چند سیگنال ضربه گسسته بنویسیم:



$$x[-1]\delta[n+1] = \begin{cases} x[-1] & n=-1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

$$x[0]\delta[n] = \begin{cases} x[0] & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

$$x[1]\delta[n-1] = \begin{cases} x[1] & n=1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

$$x[n] = \cdots + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \cdots$$

در حالت کلی، نمایش ریاضی این مجموع به این صورت است:

$$\boxed{x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)}$$

به $\delta(n-k)$ها، سیگنال‌های پایه می‌گویند.

پاسخ سیگنال ضربه را با $h_k[n]$ نشان می‌دهند:

$$\delta[n-k] \rightarrow h_k[n]$$

اگر سیستم خطی و تغییر ناپذیر با زمان باشد:

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k] \quad \Rightarrow \quad y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k]$$

به عبارت سمت راست مجموع کانولوشن می‌گویند.

اگر سیستم خطی باشد و تغییر ناپذیر با زمان نباشد آنگاه از $\delta[n] \rightarrow h[n]$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $\delta[n-k] \rightarrow h[n-k]$ پس صرفا همانگونه که نامگذاری شد پاسخ ضربه شیفت یافته را با $h_k[n]$ نشان می‌دهیم. و باید همه $h_k[n]$ها را جداگانه بدانیم

جمع کانولوشن در سیستم‌های LTI

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k]$$

مراحل محاسبه کانولوشن $x[k]*h[k]$ برای سیگنال گسسته:

1- لیست kها را به تعداد مناسب بنویسید.
2- ورودی $x[k]$ را لیست کنید.
3- رشته معکوس $h[-k]$ را به دست آورید و عنصر سمت راست $h[n-k]$ را در ستون عنصر سمت چپ $x[k]$ قرار دهید.
4- برای تولید $y[n]$ اعداد متناظر $x[k]$ و $h[k]$ را در هم ضرب می‌کنیم و موارد غیر صفر را با هم جمع می‌کنیم.
5- h را یکی به سمت راست شیفت دهید.
6- مرحله ۴ و ۵ را تا جایی که همه ورودی‌ها صفر می‌شوند تکرار کنید.

مثال: کانولوشن دو سیگنال $x[k] = [3\ 1\ 2]$ و $h[k] = [3\ 2\ 1]$ را به دست آورید. (سؤال)

حل:

k:	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$x[k]$			3	1	2			
$h[k]$			3	2	1			
$h[-k]$	1	2	3					
$h[1-k]$		1	2	3				
$h[2-k]$			1	2	3			
$h[3-k]$				1	2	3		
$h[4-k]$					1	2	3	
$h[5-k]$						1	2	3

مقدار k از منفی طول h به اضافه ۱ شروع می‌شود و تا طول h به اضافه طول x-1 ادامه پیدا می‌کند. در اینجا از -3+1=2 تا 3+3-1=5 ادامه پیدا می‌کند.

$$y[0] = 3 \times 3 = 9$$

$$y[1] = 3 \times 2 + 1 \times 3 = 9$$

$$y[2] = 3 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 3 = 11$$

$$y[3] = 1 \times 1 + 2 \times 2 = 5$$

$$y[4] = 2 \times 1 = 2$$

مثال:

کانولوشنهای زیر را به دست آورید: (تکلیف)

$$x[n] = [1\ 2\ 4], \qquad h[n] = [1\ 1\ 1\ 1\ 1] \rightarrow x[n] * h[n] = ?$$

$$x[n] = [2\quad 1\quad -2\quad 3\quad -4], h[n] = [3\ 1\ 2\ 1\ 4] \rightarrow x[n] * h[n] = ?$$

یک سیستم LTI به طور کامل با پاسخ ضربه آن شناخته می‌شود.

مثال: در یک سیستم اگر ورودی $x[n]$ و پاسخ ضربه $h[n] = \delta[n - n_0]$ خروجی چیست؟

$$y[n] = x[n] * \delta[n - n_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - n_0 - k] = x[n - n_0]$$

مثال: پاسخ ضربه سیستمی با رابطه ورودی-خروجی $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ را به دست آورید.

جواب:

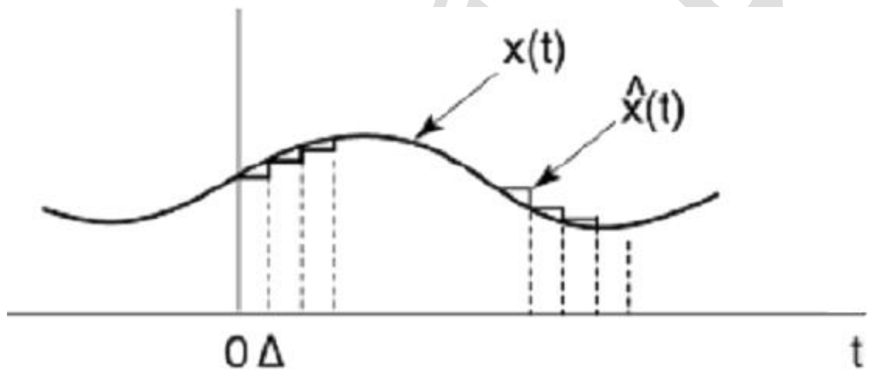
$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = u[n] \qquad x[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

مجموع جملات یک تصاعد هندسی

$$\sum_{k=0}^{n} b \times \alpha^k = \text{جمله اول} \times \frac{1 - (\text{قدر نسبت})^{\text{تعداد جملات}}}{1 - (\text{قدر نسبت})} = b \times \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

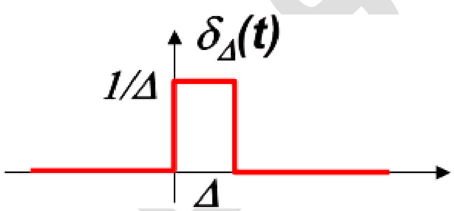
نمایش سیگنالهای پیوسته به صورت توابع ضربه

برای بررسی کانولوشن مشابه حالت گسسته، می‌توان هر سیگنال پیوسته را به صورت مجموع وزن‌دهی شده از یک سری پالس پله‌ای در نظر گرفت. فرض کنید $\hat{x}$ تقریبی پله‌ای از تابع پیوسته $x(t)$ باشد.

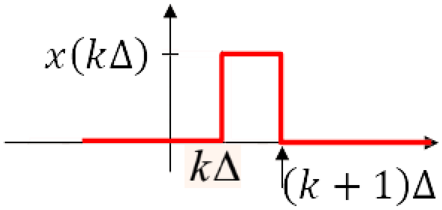


$\hat{x}(\tau) = x(k\Delta), \qquad k\Delta < \tau < (k+1)\Delta$

همانند حالت گسسته می‌توان سیگنال پیوسته را به صورت ترکیب خطی از پالس‌های تأخیر یافته نوشت. فرض کنید پالس اصلی به صورت زیر باشد:



هر کدام از پله‌ها در نمودار بالا به صورت زیر است:



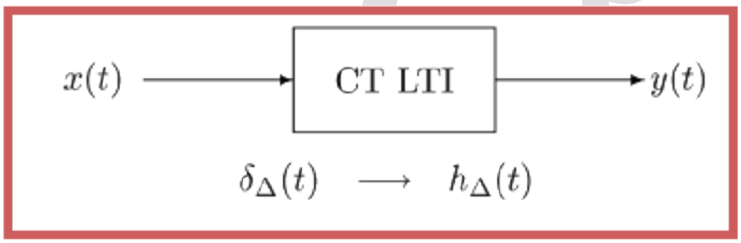
$$= x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta$$

با توجه به اینکه $\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta = 1$ در نتیجه: $\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta$

برای دقیق بودن تقریب بالا، لازم است که: $\Delta \to 0$ در نتیجه تساوی بالا به این صورت خواهد بود:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

پاسخ سیستم پیوسته در زمان *LTI* (*CT LTI*)



$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta \quad \Rightarrow \quad \hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\hat{h}_{k\Delta}(t)\Delta$$

در این سیستم ورودی $\delta(t)$ منجر به خروجی $h(t)$ می‌شود ($\delta(t) \to h(t)$). همچنین با توجه به LTI بودن سیستم ضریب ($x(k\Delta)\Delta$) هم به خروجی منتقل می‌شود.

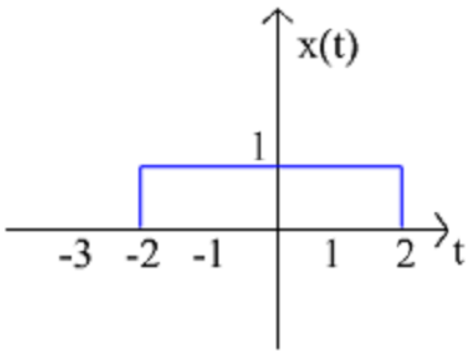
$$y(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\hat{h}_{k\Delta}(t)\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

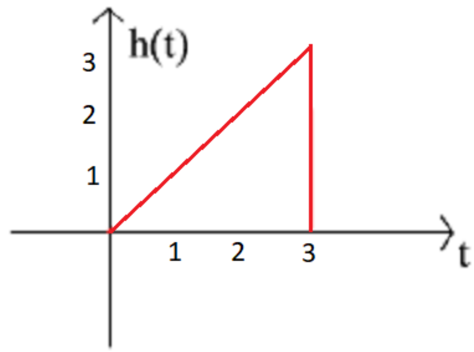
در اثر ضرب تابع ضربه در هر تابع $x(t)$، مقدار $x(t)$ در محل ضربه نمونه برداری می‌شود و سایر مقادیر $x(t)$ در نتیجه ضرب اثری ندارد.

کانولوشن زمان پیوسته:

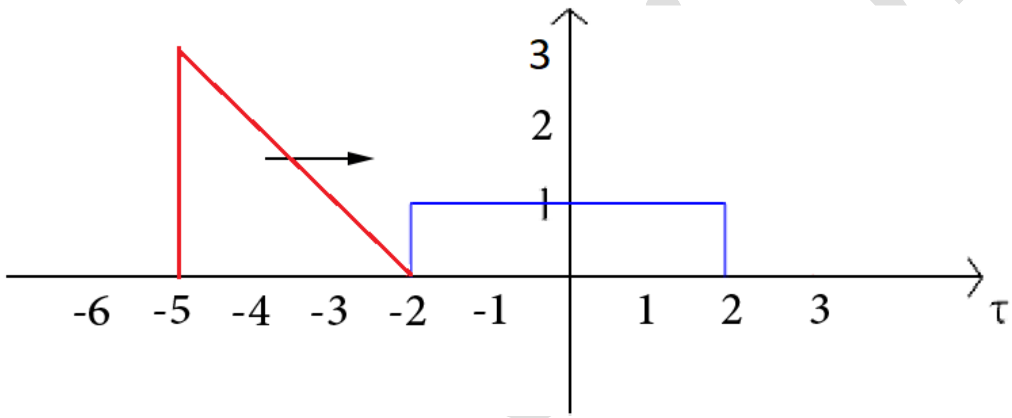
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

مثال: پاسخ سیستم $h(t)$ به ورودی $x(t)$ در شکل زیر را محاسبه کنید:





پاسخ: برای محاسبه انتگرال ابتدا توجه داریم که باید *h(-t)* را در نظر بگیریم و بسته به مقدار *t* میزان همپوشانی دو تابع بالا سه حالت مختلف را دارد که در زیر نوشته شده است:



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$t < -2: y(t) = 0$ $(no\ overlap)$

$$-2 < t < 1: y(t) = \int_{-2}^{t} (-\tau + t)d\tau$$

$$y(t) = (t+2)^2/2$$

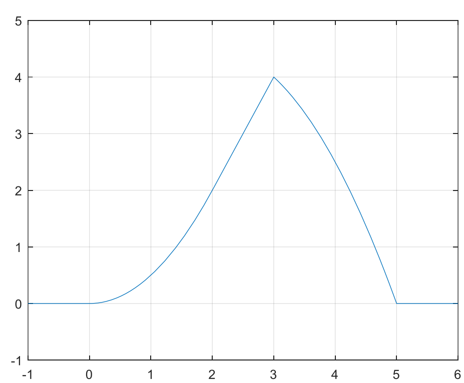
$$1 < t < 2: y(t) = \int_{t-3}^{t} (-\tau + t)d\tau$$

$$y(t) = -3t + \frac{9}{2} + 3t = 4.5$$

$$2 < t < 5: y(t) = \int_{t-3}^{2} (-\tau + t)d\tau$$

$$y(t) = -\frac{t^2}{2} - 4t + 5/2$$

$t > 5: y(t) = 0 (no\ overlap)$

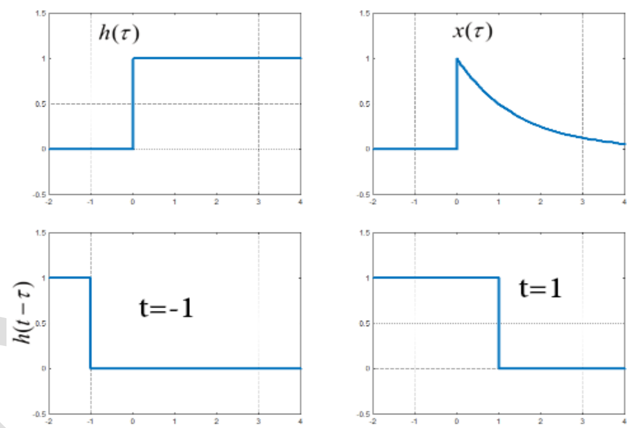


برای محاسبه این کانولوشن در متلب از این کد استفاده کنید:

```
syms t tau
x1 = t*(heaviside(t)-heaviside(t-3));
```

```
h = heaviside(t+2)-heaviside(t-2);
y = int(subs(x1,tau)*subs(h,t-tau),tau,[0 t]);
fplot(x1, 'color','r'); axis([-4 4 -4 4]); hold on
fplot(h,'Linewidth',2, 'color','g','linestyle','-.');axis([-4 4 -4 4]); grid on
figure;
fplot(y); axis([-1 6 -1 5]);grid on
```

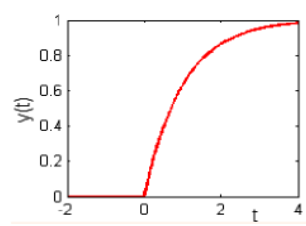
مثالی از کانولوشن: کانولوشن دو سیگنال $x(t) = e^{-at}u(t)$ و $h(t) = u(t)$ را محاسبه کنید. همانگونه که از شکل مشخص است در قسمتی که t منفی است همه توابع صفر هستند:



$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-a\tau} & 0 < \tau < t \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

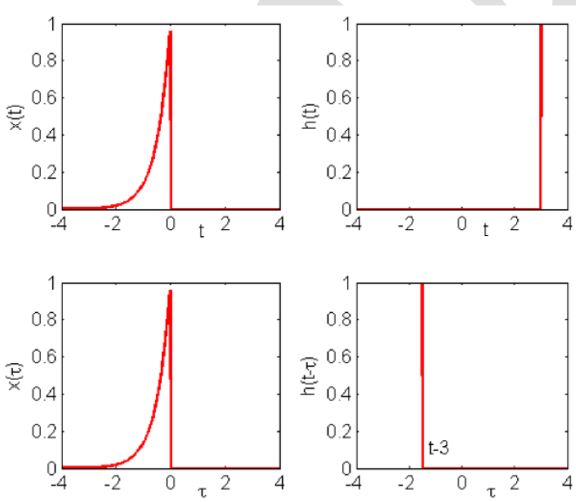
$$y(t) = \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = -\frac{1}{a} e^{-a\tau} \Big|_0^t$$

$$= \frac{1}{a}(1 - e^{-at})$$



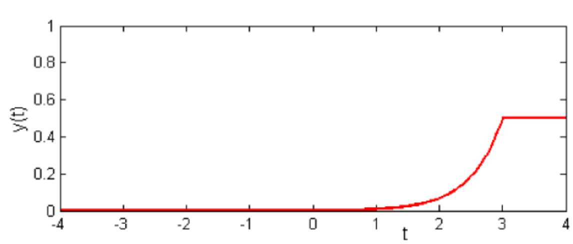
مثال: کانولوشن دو سیگنال زیر را محاسبه کنید

$$x(t) = e^{2t}u(-t), \;\; h(t) = u(t-3)$$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-3} e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2} e^{2(t-3)}, \;\; t < 3$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2}, \;\; t \geq 3$$



خصوصیات سیستم:

با توجه به این که در سیستم‌های LTI پاسخ ضربه مشخص کننده‌ی سیستم می‌باشد، با در اختیار داشتن پاسخ ضربه همه‌ی مشخصات سیستم قابل استخراج خواهد بود.

مثال: برای پاسخ ضربه $h[n] = \begin{cases} 1 & n = 0,1 \\ 0 & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$ تنها یک سیستم LTI وجود دارد:

$$y[n] = x[n] + x[n-1]$$

خاصیت جابجایی:

$$x[n]*h[n] = h[n]*x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

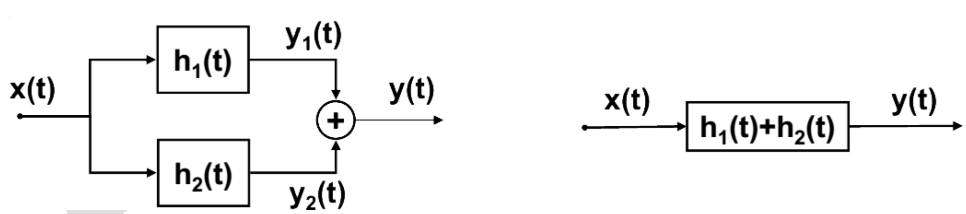
$$x(t)*h(t) = h(t)*x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

مثال: پاسخ پله یک سیستم DT LTI:

$$s[n] = u[n] * h[n] = h[n] * u[n] \Rightarrow s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

خاصیت توزیع پذیری:

$$x[n]*(h_1[n]+h_2[n]) = x[n]*h_1[n] + x[n]*h_2[n] = y_1[n] + y_2[n]$$
$$x(t)*(h_1(t)+h_2(t)) = x(t)*h_1(t) + x(t)*h_2(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

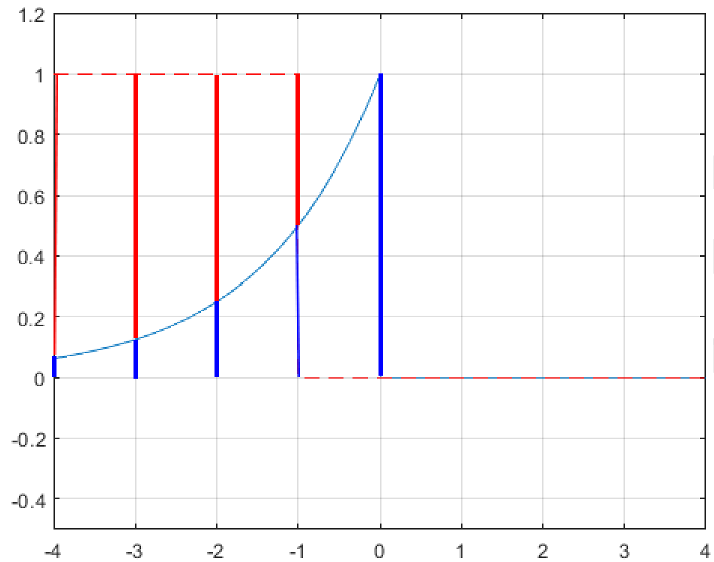


مثال: اگر سیگنال $x[n] = 0.5^n u[n] + 2^n u[-n]$ به ورودی سیستم $h[n] = u[n]$ اعمال شود، خروجی به چه صورت می‌شود؟

$$x_1[n] = 0.5^n u[n], x_2[n] = 2^n u[-n]$$
$$y[n] = (x_1[n] + x_2[n]) * h[n]$$

$$y_1[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}0.5^k\,u[k]=\left(\frac{1-0.5^{n+1}}{1-0.5}\right)u[n],$$

برای $y_2[n]$ در محاسبه کانولوشن دو حالت داریم یکی مقادیر صفر و کوچکتر و یکی مقادیر یک و بزرگتر(شکل زیر)



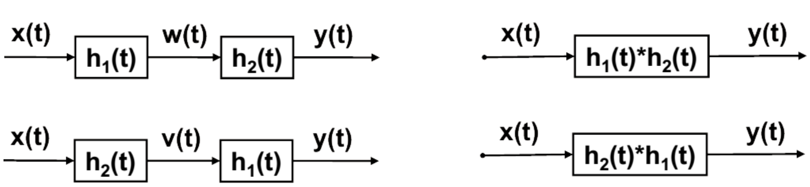
$$y_2[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}2^k u[-k]\ \ \textit{for}\ \ n\le 0,\ y_2[n]=\sum_{k=-\infty}^{0}2^k u[-k]\ \ \textit{for}\ n\ge 1$$

$$y_2[n]=\begin{cases}2^{n+1} & n\le 0\\ 2 & n\ge 1\end{cases}$$

خواص کانولوشن گسسته

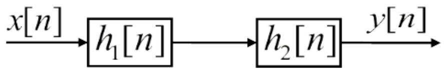
خاصیت شرکت پذیری:

$$x[n]*(h_1[n]*h_2[n])=(x[n]*h_1[n])*h_2[n]$$
$$x(t)*(h_1(t)*h_2(t))=(x(t)*h_1(t))*h_2(t)$$



نکته: در این موارد فرض شده است که اولا هیچ کدام از این سیستمها واگرا نباشد دوما اینکه عملکرد یکی از سیستمها روی دیگری اثری نداشته باشد.

در سیستم زیر $y[n]$ را به دست آورید:



$$h_1[n] = \sin(8n) \qquad h_2[n] = a^n u[n]$$

$$x[n] = \delta[n] - a\delta[n-1] \qquad y[n] = ?$$

$$y[n] = \sin(8n)$$

حل:

$$y[n] = (x[n] * h_2[n]) * h_1[n] = \big((\delta[n] - \alpha\delta[n-1]) * \alpha^n u[n]\big) * \sin[8n]$$

$$= (\alpha^n u[n] - \alpha^{n-1+1} u[n-1]) * \sin[8n] = \alpha^n \times \delta[n] * \sin[8n]$$

$$= \alpha^0 \times \delta[n] * \sin[8n] = \sin[8n]$$

با توجه به اینکه پاسخ ضربه سیستم LTI مشخص کننده سیستم است، مشخصات سیستم از روی پاسخ ضربه قابل تشخیص خواهد بود:

- علیت:

$$h[n] = 0 \quad for \quad n < 0$$

$$h(t) = 0 \quad for \quad t < 0$$

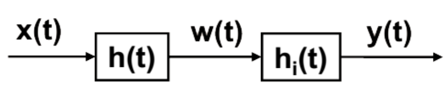
- پایداری:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \qquad \int_{\tau=-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

- بی حافظه بودن:

$$h[n] = k\delta[n] \qquad y(t) = kx(t)$$

- معکوس پذیری:



$$h[n] * h_i[n] = \delta[n] \qquad h(t) * h_i(t) = \delta(t)$$

به طور خلاصه یک h_i وجود داشته باشد که رابطه بالا برقرار باشد.

کدام یک از سیستم‌های زیر پایدار هستند؟

$$h[n]=\delta[n-n_0] \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|\delta[k-n_0]| = 1 < \infty$$

$$h(t)=\delta(t-t_0) \qquad \int_{-\infty}^{\infty}|h(\tau)|d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}|\delta(\tau-t_0)|d\tau = 1 < \infty$$

$$h[n]=u[n-n_0]$$

$$h(t)=u(t-t_0) \qquad \int_{-\infty}^{\infty}|h(\tau)|d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}|u(\tau-t_0)|d\tau = \int_{t_0}^{\infty}|u(\tau)|d\tau = \infty$$

پاسخ پله در سیستم‌های LTI

$$s[n] = u[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \Rightarrow h[k] = s[n] - s[n-1]$$

$$s(t) = u(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{t} h(\tau)d\tau \Rightarrow h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = s'(t)$$

در این دو معادله، عبارت سمت راست چگونگی به دست آوردن پاسخ ضربه از روی پاسخ پله را نشان می‌دهد.

سیستم‌های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل و تفاضلی (دیفرنس) با ضرایب خطی

- یکی از مهمترین سیستم‌های LTI هستند.

در سیستم‌های پیوسته:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$$

در سیستم‌های گسسته:

$$y[n] + ay[n-1] = bx[n]$$

معادلات دیفرانسیل خطی

فرم کلی این سیستم‌ها به صورت زیر است:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

- آیا چنین سیستمی پایدار است؟

مثال:

$$\frac{dy(t)}{dt}-a_1y(t)=0 \qquad y(t)=Ae^{a_1t}$$

بسته به مقدار a ممکن است پایدار باشد یا ناپایدار نباشد.

مثال: رابطه ورودی و خروجی سیستم $\frac{dy(t)}{dt}-2y(t)=x(t)$ چیست؟

پاسخ این سیستم شامل دو قسمت است، جواب خصوصی y_p و جواب همگن y_h

جواب همگن با صفر قرار دادن ورودی به دست می‌آید:

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=0 \Rightarrow y_h=Ae^{-2t}u(t)$$

جواب خصوصی به $x(t)$ بستگی دارد. و باید آن را داشته باشیم تا پاسخ خصوصی را بدست آوریم.

مثلا اگر برای $t>0$، $x(t)=ke^{3t}$ باشد، برای $t>0$ جوابی را به شکل $y_p=Ye^{3t}$ خواهیم داشت که در آن Y عددی است که باید تعیین شود. با جایگذاری جواب خصوصی در معادله دیفرانسیل سیستم خواهیم داشت:

$$3Ye^{3t}+2Ye^{3t}=Ke^{3t} \Rightarrow 3Y+2Y=K \Rightarrow Y=\frac{K}{5} \Rightarrow$$

$$y_p(t)=\frac{K}{5}e^{3t}, t>0 \Rightarrow y(t)=Ae^{-2t}+\frac{K}{5}e^{3t}$$

در همین مثال، اگر $x(t)=Kcos(\omega_0 t)u(t)$ باشد:

$$y_p(t)=\frac{K}{\sqrt{4+\omega_0^2}}\cos(\omega_0-\theta) \Rightarrow \theta=\tan^{-1}\left(\frac{\omega_0}{2}\right), y(0)=y_0$$

$$y(t)=y_0e^{-2t}+\frac{K}{\sqrt{4+\omega_0^2}}[\cos(\omega_0-\theta)-e^{-2t}\cos(\theta)]u(t)$$

سیستم LTI است. این سیستم در صورتی خطی خواهد بود که $y(0)=0$.

معادلات تفاضلی خطی

فرم کلی چنین سیستم‌هایی به این صورت است (فرم بازگشتی):

$$\sum_{k=0}^{N}a_k y[n-k]=\sum_{k=0}^{M}b_k x[n-k]$$

اگر در معادله بالا $N=0$ باشد، معادله به فرم زیر تقلیل می‌یابد:

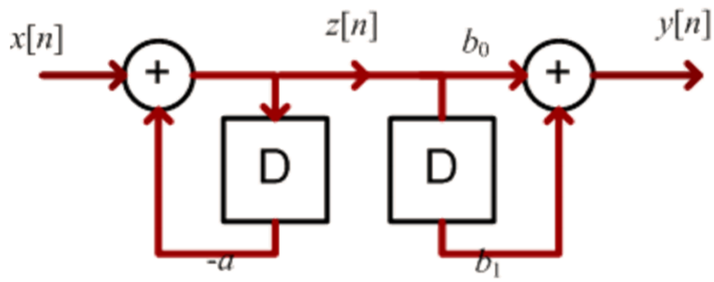
$$y[n]=\sum_{k=0}^{M}\frac{b_k}{a_0}x[n-k]$$

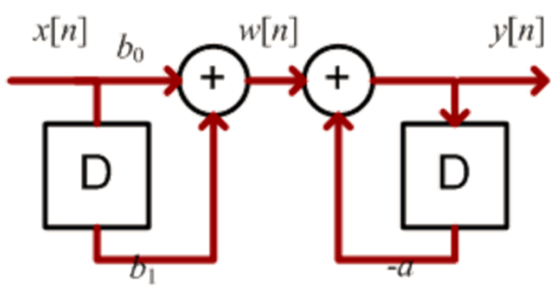
اگر طول پاسخ ضربه چنین سیستمی محدود باشد به این سیستم FIR و در غیر این صورت IIR می‌گویند.

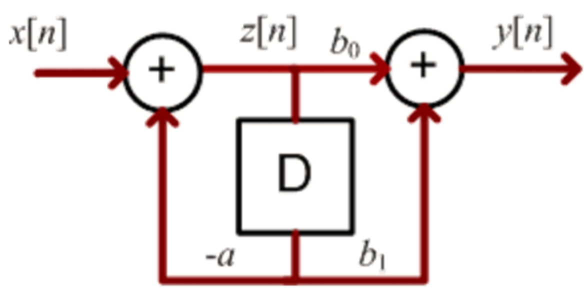
- **دیاگرام بلوکی معادلات تفاضلی:**

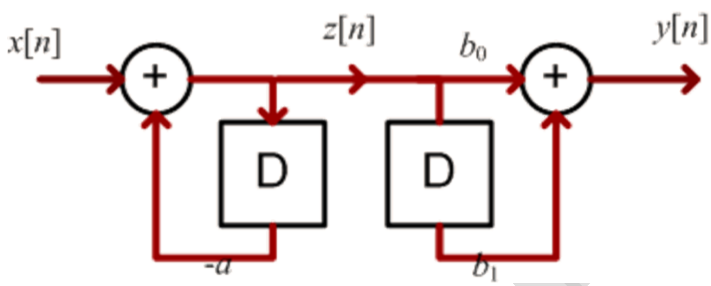
$$y[n]=-a_1y[n-1]+b_0x[n]+b_1x[n-1]$$

$$y[n]=-a_1y[n-1]+b_0x[n]+b_1x[n-1]$$







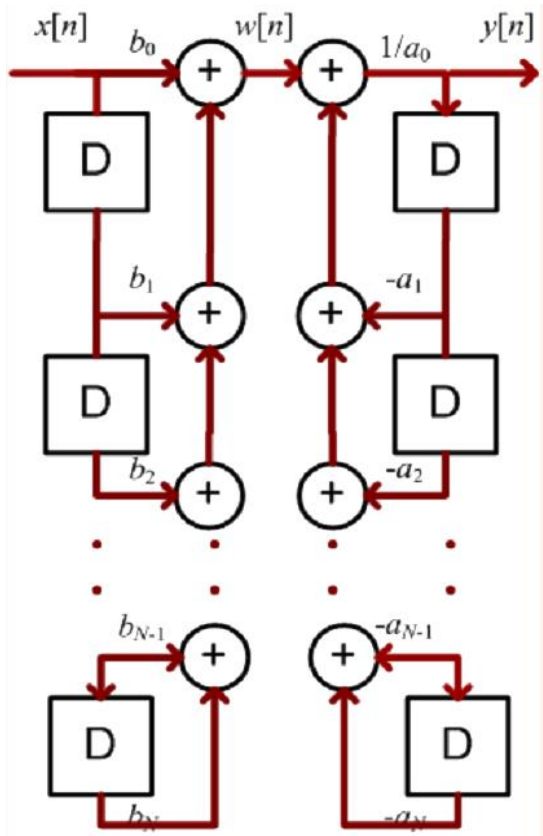


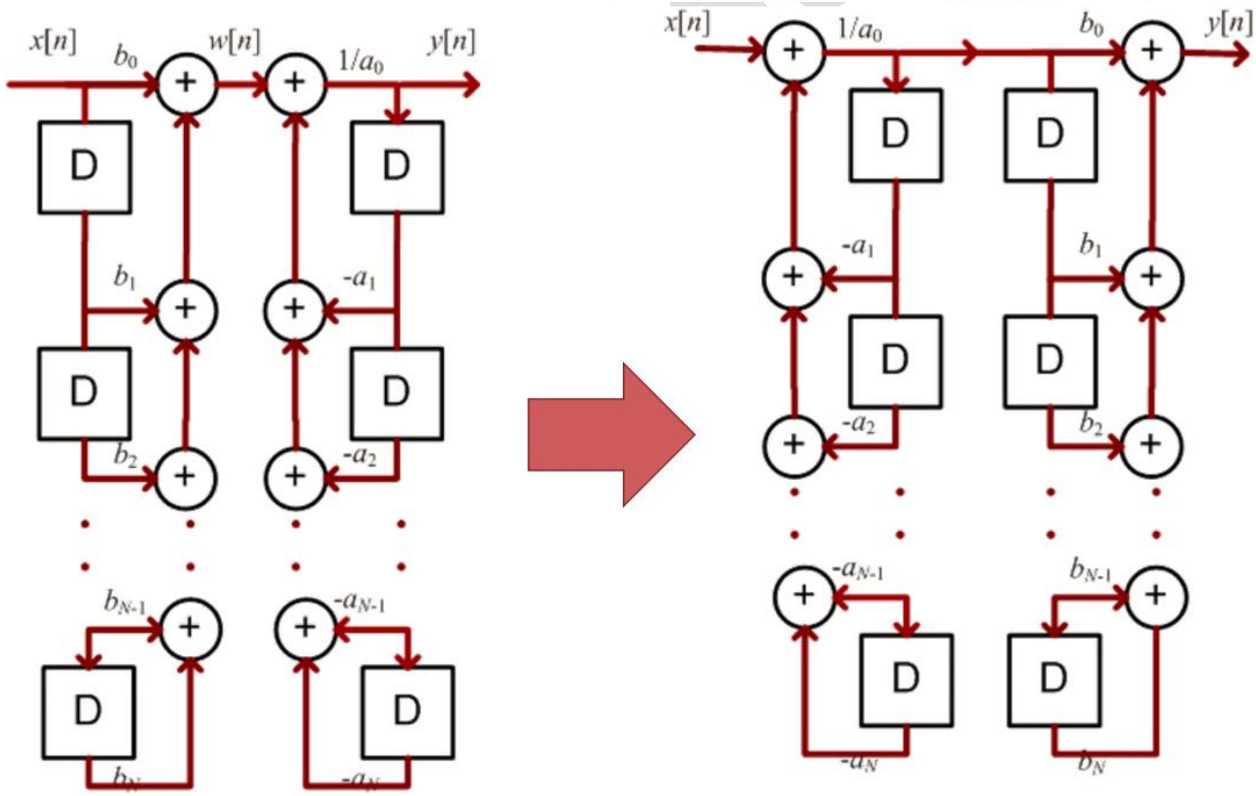
برای رسیدن به دیاگرام بالا سمت راست، فقط جای دوتا بلوک پشت سر هم را عوض کردیم.

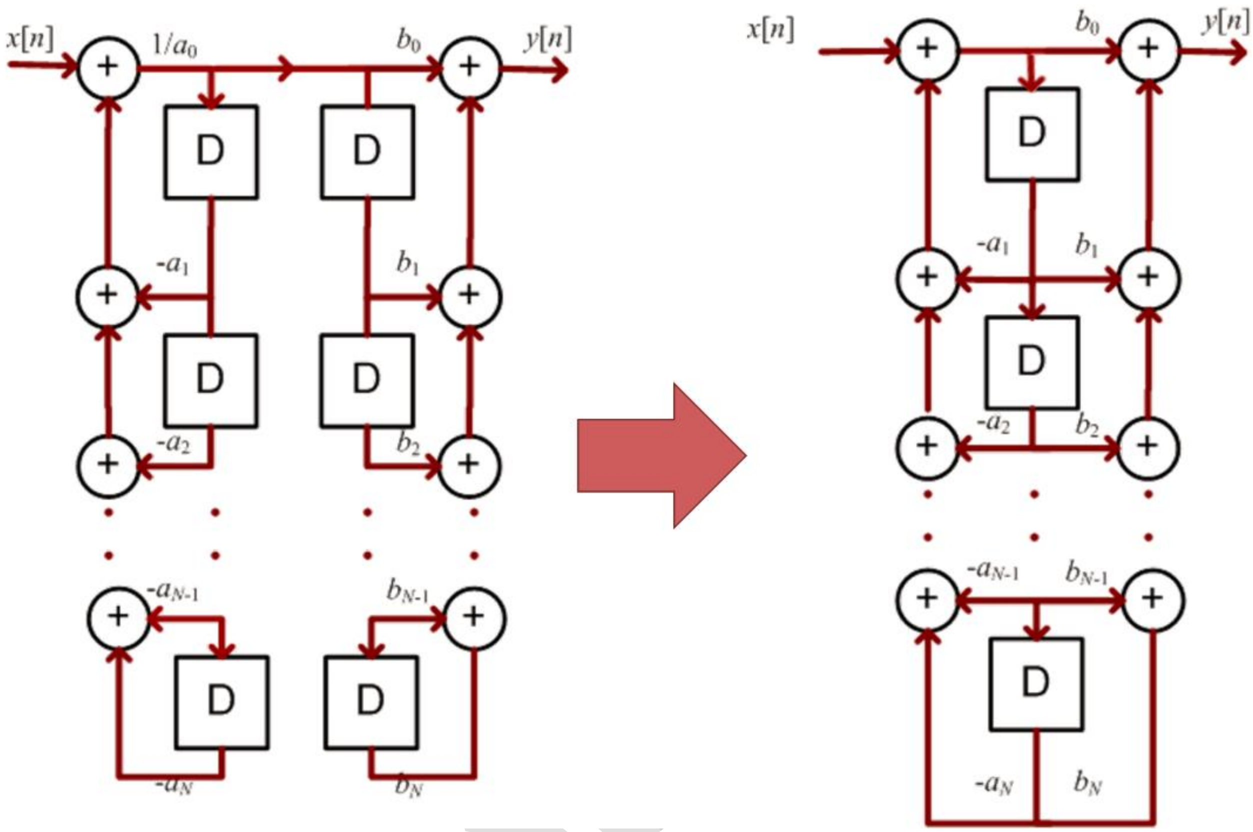
بلوک بالا سمت چپ Direct form I structure است که در آن بلوکهای جمع (+) کنار هم هستند. با جابجایی بخش-های سمت راست و سمت چپ، بلوکهای تأخیر کنار هم قرار می‌گیرند و Direct form II structure را شکل می‌دهند.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{-\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]\right\}$$







توابع ویژه

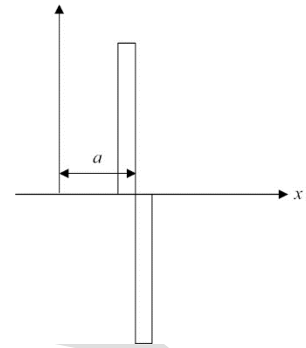
می‌دانیم نتیجه کانولوشن هر سیگنال با سیگنال ضربه برابر با همان سیگنال می‌شود:

$$x(t) = x(t) * \delta(t)$$

تابع ضربه واحد یک سیگنال به اندازه کافی کوچک است که شکل آن مهم نیست. آنچه مهم است نتیجه کانولوشن آنها با سیگنال ورودی است. به این سیگنال‌ها توابع ویژه می‌گوییم.

دوبلتهای واحد و توابع ویژه دیگر

یک سیستم LTI را در نظر بگیرید که در آن خروجی مشتق ورودی باشد. پاسخ ضربه واحد این سیستم برابر مشتق ضربه واحد است که به آن *دوبلت واحد* (u_1) می‌گویند. همچنین مشتق دوم ضربه واحد (u_2) و $u_k = u_1 * \ldots * u_1$ که از k بار کانوالو کردن u_1 به دست می‌آید. در ادامه دوبلت‌های دیگری نیز معرفی شده‌اند.



$$x(t) \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}} \longrightarrow y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

پاسخ ضربه = دوبلت واحد

$$u_1(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$

تعریف عملیاتی دوبلت واحد

$$x(t) * u_1(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\left[x(t)*\delta(t)\right]}{dt} = \frac{d\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right]}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta'(t-\tau)d\tau$$

$$= \frac{d\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\delta(\tau)d\tau\right]}{dt} \qquad = \int_{-\infty}^{\infty} x'(t-\tau)\delta(\tau)d\tau$$

$$x'(t) = x(t)*\delta'(t) \qquad\qquad x(t)*h'(t) = x'(t)*h(t)$$

$$x(t)*\delta'(t)=?\qquad x(t)*\delta'(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

$$x(t)*\delta(t)=?\qquad x(t)*\delta(t)=x(t)$$

$$x(t)*u(t)=?\qquad x(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,d\tau$$

$$x(t)*u(t)*u(t)=?\quad x(t)*tu(t)$$

مثال:

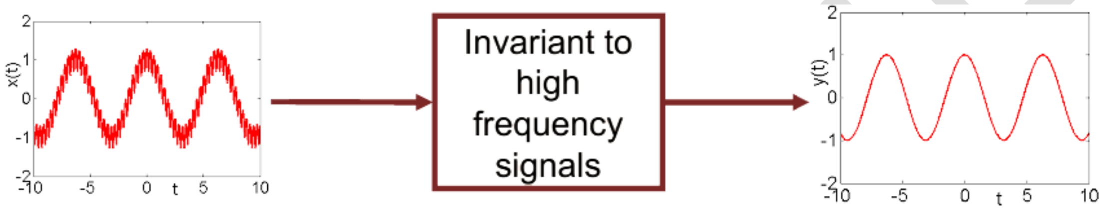
$$u(t)*u_1(t)=\delta(t)\qquad u_k(t)*u_r(t)=u_{k+r}(t)$$

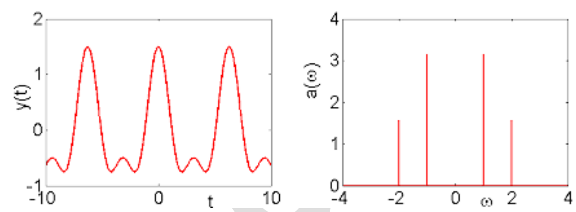
فصل سوم (سری فوریه سیگنال‌های متناوب)

سری فوریه سیگنال‌های متناوب

چرا آنالیز فوریه اهمیت دارد؟

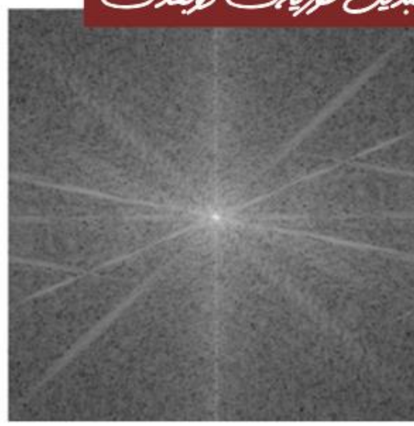
- در بسیاری از کاربردها به تجزیه و تحلیل فرکانس‌های موجود در یک سیگنال احتیاج داریم.
- با استفاده از این تئوری یک سیگنال از دامنه‌ی زمان (مکان) به دامنه‌ی فرکانس منتقل می‌شوند.





مثالی از کاربرد تبدیل فوریه در نرم افزار MATLAB:

```
clear all;
clc;
Img=imread('cameraman.tif');
imshow(Img);
FImg=fft2(Img);
FImg=fftshift(FImg);
imshow(log(FImg),[]);
```

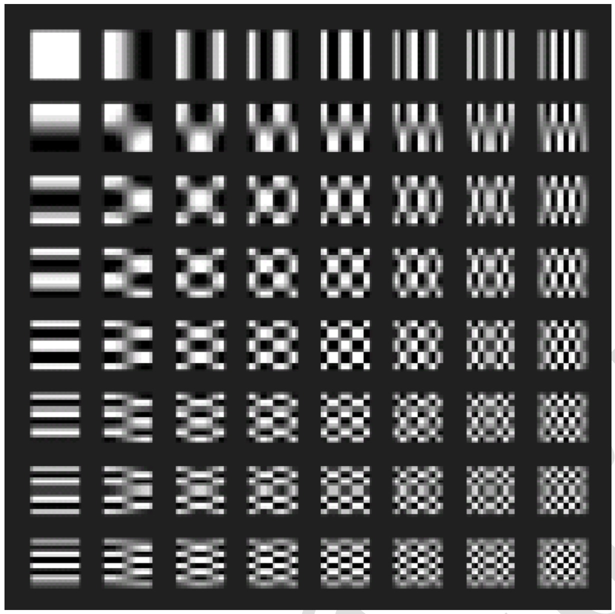

پس از اعمال تبدیل فوریه‌ی دوبعدی


تصویر اصلی

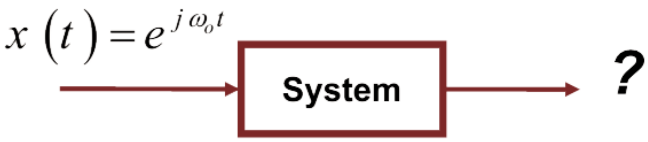
سیگنال‌های پایه:

- با استفاده از سیگنال‌های پایه‌ی مناسب می‌توان دسته بزرگی از سیگنال‌ها را نمایش داد.
- بر این اساس تحلیل پاسخ به ورودی‌های مختلف، بسیار ساده‌تر خواهد بود.
- در عمل توابع پایه‌ی متعددی مورد استفاده قرار می‌گیرد.
- در این بخش به یکی از مهمترین دسته از توابع پایه پرداخته خواهد شد.

تصاویر پایه تبدیل کسینوسی (در این تبدیل که تصویر را از حوزه مکان به فرکانس تبدیل می‌کند فقط مقادیر حقیقی استفاده می‌شوند، تصویر به بخش‌های کوچکتر تقسیم می‌شود و هر بخش به صورت مجموع وزن‌دار تصاویر پایه به‌دست می‌آید.)



توابع ویژه و خواص آن:

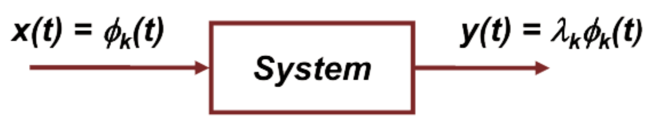


$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 (t-\tau)} h(\tau)\,d\tau$$

$$y(t)=\underbrace{\boxed{e^{j\omega_0 t}}}_{\text{eigenfunction}}\ \underbrace{\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0 \tau} h(\tau)\,d\tau}}_{\text{eigenvalue}}$$

تابع ویژه — مقدار ویژه

eigenfunction — **eigenvalue**



در صورتی که بتوان یک تابع را به صورت مجموع توابع ویژه نوشت:

- $x(t) = \Sigma_k\, a_k \phi_k(t)$

$x(t) = \Sigma_k\, a_k \phi_k(t)$

$y(t) = \Sigma_k\, a_k \lambda_k \phi_k(t)$

توابع نمایی مختلط زمان پیوسته $e^{(x+jy)t} = e^{st}$

$$x(t)=e^{st} \xrightarrow{} \boxed{h(t)} \xrightarrow{}$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{s(t-\tau)}h(\tau)\,d\tau$$

$$y(t)=\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\tau}h(\tau)\,d\tau\right]e^{st} \Rightarrow y(t)=\underbrace{\boxed{H(s)}}_{\text{مقدار ویژه}}\ \underbrace{\boxed{e^{st}}}_{\text{تابع ویژه}}$$

در سیستم‌های LTI توابع به شکل $\emptyset(t) = e^{st}$ (که s عدد مختلط است) توابع ویژه هستند.

توابع نمایی مختلط زمان گسسته $(x + jy)^n = z^n$

$$x[n]=z^{n} \xrightarrow{} \boxed{h[n]} \xrightarrow{}$$

$$y[n]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]z^{n-m}$$

$$y[n]=\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]z^{-m}\right]z^{n} \Rightarrow y(t)=\underbrace{\boxed{H[z]}}_{\text{مقدار ویژه}}\ \underbrace{\boxed{z^{n}}}_{\text{تابع ویژه}}$$

در سیستم‌های LSI توابع به شکل $\emptyset(t) = z^n$ (که z عدد مختلط است) توابع ویژه هستند. LSI مخفف Linear Shift Invariant برای سیستمهای گسسته است که معادل LTI در سیستم‌های پیوسته است.

سری فوریه سیگنال‌های متناوب:

$$x(t) = x(t+T) \quad \text{برای همه } t\text{ها}$$

- به کوچکترین T، پریود اساسی گفته می‌شود.
- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$، فرکانس اساسی است.
- هر سیگنال متناوب را می‌توان با کمک سری فوریه نمایش داد.

توابع پایه زیر برای نمایش سیگنال متناوب با دوره‌ی تناوب T به کار می‌رود:

$$\phi_k(t)=e^{jk\omega_0 t}=e^{jk(2\pi/T)t} \qquad k=0,\pm1,\pm2,\dots$$

سیگنال متناوب $x(t)$ با استفاده از توابع پایه‌ی سری فوریه به این صورت نمایش داده می‌شود:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

$$x(t) = a_0e^{j\times0\times\omega_0} + a_1e^{j\times1\times\omega_0} + \cdots + a_ne^{jn\omega_0} = a_0 + a_1e^{j\omega_0} + \cdots + a_ne^{jn\omega_0}$$

ضرایب a_k ضرایب سری فوریه نامیده می‌شوند. a_0 مؤلفه‌ی DC، جمله متناظر با $a_{\pm1}$ مؤلفه‌ی اساسی (هارمونیک اول) و جمله متناظر با $a_{\pm n}$ مؤلفه‌ی هارمونیک nام هستند.

محاسبه ضرایب سری فوریه – مثال:

ضرایب سری فوریه‌ی تابع $x(t) = \cos(4\pi t) + 2\sin(8\pi t)$ را محاسبه کنید.

$$x(t) = \frac{1}{2}[e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}] + \frac{1}{j}[e^{j8\pi t} - e^{-j8\pi t}]$$

$$\omega_0 = 4\pi \quad T = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} \quad a_0 = 0 \quad a_1 = \frac{1}{2} \quad a_{-1} = \frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{1}{j} \quad a_{-2} = -\frac{1}{j}$$

برای نمایش توابع حقیقی با استفاده از سری فوریه می‌توان به شیوه‌های زیر نیز عمل کرد:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\alpha_k \cos k\omega_0 t + \beta_k \sin k\omega_0 t\right] \quad \text{و} \quad x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\gamma_k \cos\left(k\omega_0 t + \theta_k\right)\right]$$

۳-۱- محاسبه ضرایب سری فوریه

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

طرفین را در $e^{-jn\omega_0 t}$ ضرب می‌کنیم

$$x(t)e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}\, e^{-jn\omega_0 t}$$

از طرفین انتگرال می‌گیریم

$$\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(k-n)\omega_0 t}\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left[\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt\right]$$

با استفاده از فرمول اویلر داریم:

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt = \int_0^T \cos\big((k-n)\omega_0 t\big)\, dt + j\int_0^T \sin\big((k-n)\omega_0 t\big)\, dt$$

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt = \begin{cases} T, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \leftarrow$$ سطح زیر منحنی $\sin(x)$ و $\cos(x)$ در یک دوره تناوب

در نتیجه:

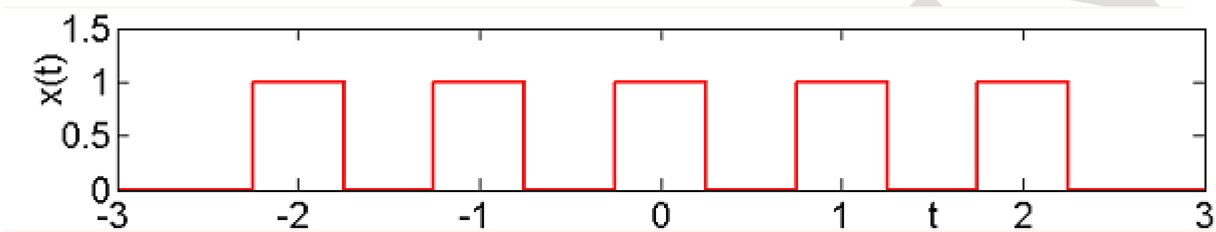
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left[\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt\right] = Ta_n$$

۳-۲- ضرایب سری فوریه:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

مثال: سری فوریه سیگنال زیر را محاسبه کنید:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < \dfrac{T}{2} \end{cases}$$



حل:

مؤلفه DC که مقدار میانگین سیگنال است $\leftarrow$ $a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} 1dt = \frac{2T_1}{T}$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t}dt = -\frac{1}{jk\omega_0 T}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{2}{k\omega_0 T}\left(\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j}\right)$$

$$= \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} = \frac{\sin\left(k\frac{2\pi}{T}T_1\right)}{k\pi} = d\,\frac{\sin(\pi k d)}{k\pi d}$$

پس به این صورت هم می‌توان نوشت:

$$a_k = d\,\mathrm{sinc}\,kd \xrightarrow{where} d = \frac{2T_1}{T}\ (Duty\ cycle)$$

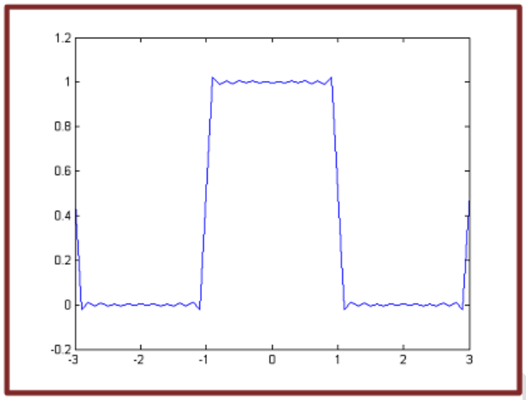
نکته: فرمولهای اویلر ($euler's\ formula$)

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right) \quad \sin\theta = \frac{1}{2j}\left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right)$$

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

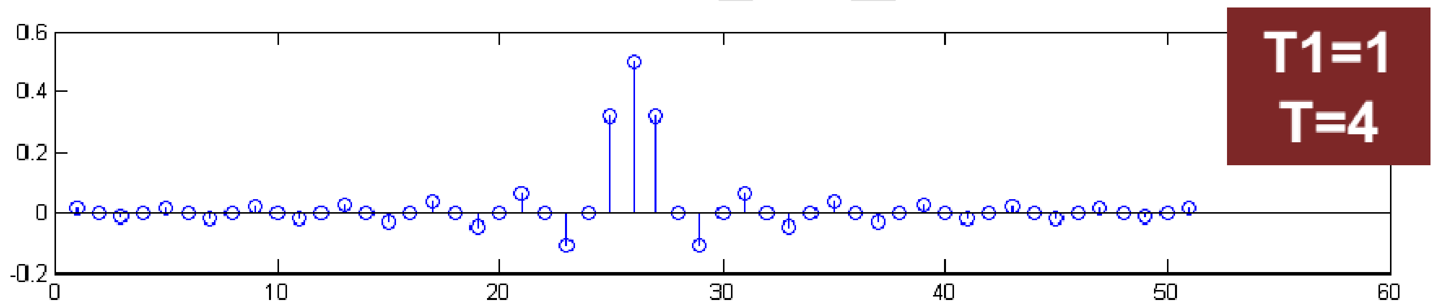
نمایش سیگنال‌های فوق در نرم افزار $MATLAB$:

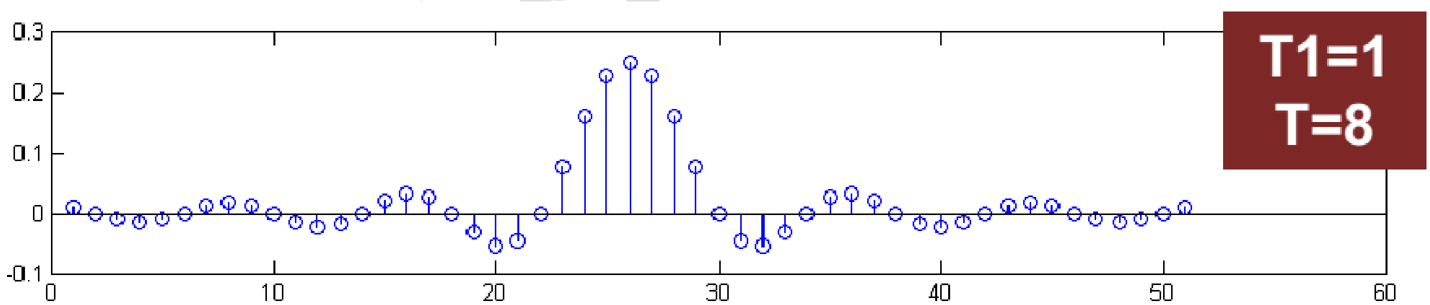
```
clear all;
clc;
T1=1;
T=4;
W=2*pi/T;
a0=2*T1/T;
x=[-3:0.1:3];
y=ones(size(x)).*a0;
plot(x,y);
for k=1:100
    a(k)=sin(k*W*T1)/(k*pi);
    y=y+(a(k).*(exp(j*k*W*x)+exp(-j*k*W*x)));
    plot(x,y);
end
```

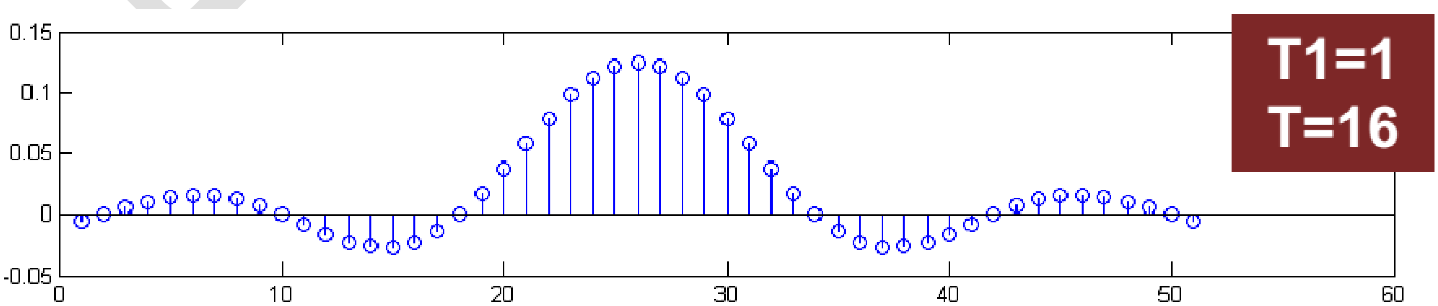


این برنامه تا صد ضریب a_k را محاسبه می‌کند و هارمونیکها را به y اضافه می‌کند. توجه داشته باشید که سیگنال زوج است و $a_k = a_{-k}$ است، در کد نوشته شده، هارمونیک‌های مربوط به این ضرایب قرینه با هم به y اضافه می‌شوند.

a_kها به این صورت هستند:



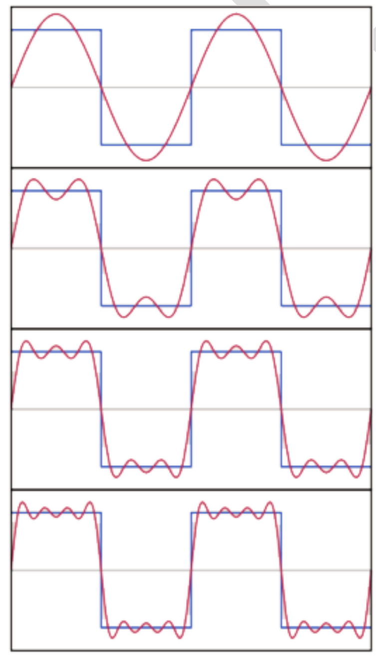




همگرایی سری فوریه:

برای بررسی صحت عملکرد سری فوریه، تخمینی از سیگنال مربعی $x(t)$ را به صورت ترکیبی از توابع نمایی در نظر می‌گیریم و خطای تخمین $e(t)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$



$$e_N(t) = x(t) - x_N(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$E_N = \int_{T_0} \left|e_N(t)\right|^2 dt = \int_{T_0} e_N(t) e_N^*(t) dt$$

$\int_0^T \left|x(t)\right|^2 dt < \infty$ ⇦ اگر انرژی سیگنال محدود باشد

$\left|a_k\right| < \infty$ ⇦ آنگاه

E_N انرژی خطا در یک دوره تناوب است که به عنوان معیاری برای مشخص کردن میزان خطا استفاده شد. با بزرگتر شدن N، خطا کوچکتر می‌شود.

ممکن است انتگرال مربوط به ضرایب، واگرا شود و در بعضی حالات سری به دست آمده به $x(t)$ همگرا نشود.

شرایط دریکله برای موجود بودن سری فوریه

۱- $x(t)$ به طور مطلق در یک دوره انتگرال پذیر باشد. (انتگرال قدر مطلق آن در یک دوره کمتر از بینهایت باشد)

$$\left|a_k\right| \le \frac{1}{T_0} \int_0^T \left|x(t) e^{-jk\omega_0 t}\right| dt < \frac{1}{T_0} \int_0^T \left|x(t)\right| dt$$

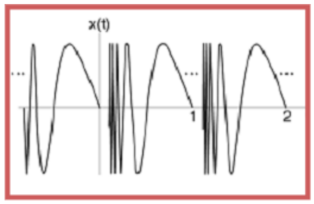
$$\frac{1}{T_0} \int_0^T \left|x(t)\right| dt < \infty \qquad\qquad \left|a_k\right| < \infty$$

پس ضرایب محدود هستند. سیگنال $x(t) = \frac{1}{t},\ \ 0 < t \le 1$ شرط اول دریکله را نقض می‌کند.

۲- به طور مطلق در یک دوره تعداد محدودی نقاط مینیمم و ماکزیمم داشته باشد.

سیگنال زیر این شرط را نقض می‌کند:

$$x(t)=\sin\left(\frac{2\pi}{t}\right),\quad 0<t<1$$



۳- در یک دوره تناوب تعداد نقاط گسستگی محدود داشته باشد.

مثال: سیگنال $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$ را بر اساس سری فوریه بنویسید:

حل:

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\quad for\ all\ k\Rightarrow x(t)=\frac{1}{T}\sum_{k=-N}^{N}e^{jk\omega_0 t}$$

همه مؤلفه‌ها دارای فاز و اندازه یکسانی هستند.

برخی خواص سری فوریه پیوسته

- خطی بودن:

$$x(t)\xleftrightarrow{FS}a_k\qquad y(t)\xleftrightarrow{FS}b_k$$

$$z(t)=Ax(t)+By(t)\xleftrightarrow{FS}c_k=Aa_k+Bb_k$$

- شیفت زمانی:

$$x(t)\xleftrightarrow{FS}a_k$$

$$x(t-t_0)\xleftrightarrow{FS}a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$$

- قرینه کردن نسبت به محور زمان:

$$x(t)\xleftrightarrow{FS}a_k\qquad x(-t)\xleftrightarrow{FS}a_{-k}$$

- اگر سیگنال زوج باشد:

$$x(t)=x(-t)\quad\Rightarrow a_k=a_{-k}$$

- ضرایب سری فوریه مزدوج:

$$x(t)\xleftrightarrow{FS}a_k\qquad x^*(t)\xleftrightarrow{FS}a_{-k}^*$$

- اگر سیگنال فرد باشد:

$$x(t)=-x(-t)\quad\Rightarrow a_k=-a_{-k}$$

- اگر سیگنال حقیقی باشد:

$$x(t)=x^*(t)\Rightarrow a_{-k}^*=a_k\quad \textbf{or}\quad a_k^*=a_{-k}$$

$$x(t)=x^*(t)\Rightarrow |a_k|=|a_{-k}|\qquad \measuredangle a_{-k}=-\measuredangle a_k$$

زوج است   فرد است

$$a_k=\mathrm{Re}\{a_k\}+j\,\mathrm{Im}\{a_k\}=|a_k|e^{j\angle a_k}$$

$x(t)$ حقیقی و فرد $\Rightarrow$ a_k موهومی و فرد

$x(t)$ حقیقی و زوج $\Rightarrow$ a_k حقیقی و زوج

$Od\{x(t)\}$ **[x(t)real]** $\Rightarrow$ $j\,\mathrm{Im}\{a_k\}$

$Ev\{x(t)\}$ **[x(t)real]** $\Rightarrow$ $\mathrm{Re}\{a_k\}$

آخرین مورد مربوط به تجزیه زوج و فرد می‌شود.

- **مشتق:**

$$x(t)\xleftrightarrow{FS}a_k$$

$$x'(t)\xleftrightarrow{FS}(jk\omega_0)a_k$$

$$x^{(n)}(t)\xleftrightarrow{FS}(jk\omega_0)^n a_k$$

- **تغییر مقیاس(Time Scaling):**

$$x(\alpha t)\xleftrightarrow{FS}a_k$$

بدون تغییر در ضرایب سری فوریه

ضرب:

$$x(t)\xleftrightarrow{FS}a_k \quad \text{و} \quad y(t)\xleftrightarrow{FS}b_k \longrightarrow x(t)y(t)\xleftrightarrow{FS}h_k=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m b_{k-m}$$

اثبات:

$$x(t)y(t)=\sum_{l}a_l e^{jl\omega_0 t}\sum_{m}b_m e^{jm\omega_0 t}$$

$$=\sum_{l}\sum_{m}a_l b_m e^{j(l+m)\omega_0 t}\xrightarrow{l+m=k}\sum_{k}\left[\sum_{l}a_l b_{k-l}\right]e^{j(k)\omega_0 t}$$

در بالا چون محدوده k از منفی بینهایت تا بینهایت است در محدوده سیگما به جای k-l نوشته شد k

رابطه پارسوال: انرژی چه در حوزه فرکانس اندازه‌گیری شود چه در حوزه زمان فرق نخواهد داشت:

$$\frac{1}{T}\int_{T}|x(t)|^2dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_k|^2$$

انرژی هارمونیک k ام --- انرژی متوسط سیگنال

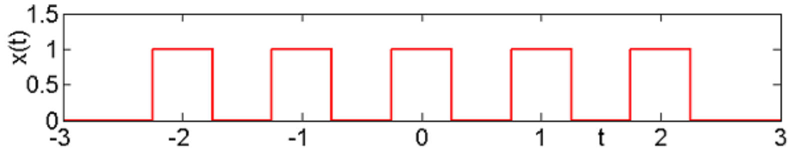
جدول ۳-۱ صفحه ۲۲۱ ملاحظه شود.

مثال: ضرایب سری فوریه را برای سیگنال زیر محاسبه کنید:

$$x(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<1\\ -1 & 1\le t<2\end{cases} \quad , \quad T_0=2$$

$$a_k=\frac{1}{2}\int_0^2 x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 e^{-jk\pi t}dt-\int_1^2 e^{-jk\pi t}dt\right]=\frac{1-e^{-jk\pi}}{jk\pi}=\begin{cases}0 & k \text{ even}\\ \dfrac{2}{jk\pi} & k \text{ odd}\end{cases}$$

مثال (روش دیگر با استفاده از شیفت یافته سیگنال):



$$x(t)=\begin{cases}1 & |t|<T_1\\ 0 & T_1<|t|<T/2\end{cases} \qquad a_k=\sin(k\,\omega_0 T_1)/k\,\pi$$

برای سیگنال مشابه شیفت یافته داریم:

$$x_1=\begin{cases}1 & 0\le t<1\\ 0 & 1\le t<2\end{cases}\ ,\qquad a_{1k}=\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi}e^{-jk\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{jk\pi},k \quad \text{فرد}$$

$$x(t)=x_1(t)-x_1(t-1) \qquad a_k=a_{1k}[1-e^{-jk\pi}]=\begin{cases}0 & k \ \text{زوج}\\ 2a_{1k} & k \ \text{فرد}\end{cases}$$

روش سوم (با استفاده از مشتق): ضرایب سری فوریه را برای سیگنال زیر محاسبه کنید.

$$x(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<1\\ -1 & 1\le t<2\end{cases}\qquad ,\qquad T_0=2$$

$$x'(t)=2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-2n)-2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-2n-1)$$

$$x'(t)\xleftrightarrow{FS}1-e^{jk\pi}=\begin{cases}0 & k\ even\\ 1 & k\ \text{odd}\end{cases}$$

$$x(t)\xleftrightarrow{FS}\begin{cases}0 & k\ even\\ \dfrac{1}{jk\pi} & k\ \text{odd}\end{cases}$$

مثال: از $x(t)$ اطلاعات زیر در دست است (سؤال):

1- حقیقی است.
2- با $T=4$ متناوب است
3- ضرایب سری فوریه به ازاء $|k|>1$ صفر است.
4- سیگنال با ضرایب سری فوریه $b_k=e^{-jk\frac{\pi}{2}}a_{-k}$ فرد است.
5- داریم: $\frac{1}{4}\int_4 |x(t)|^2dt=\frac{1}{2}$

این اطلاعات برای شناسایی $x(t)$ کافی است. با اساس ویژگی سوم، این سیگنال حداکثر سه ضریب a_{-1}، a_0 و a_1 غیر صفر دارد. از بند دوم نتیجه می‌گیریم: $x(t) = a_0 + a_1 e^{j\pi t/2} + a_{-1} e^{-j\pi t/2}$

بر اساس بند اول، نتیجه می‌گیریم a_0 حقیقی است و $a_1 = a_{-1}^*$ در نتیجه (چون با مزدوج گیری توان e در یک منفی ضرب می‌شود، در داخل پرانتز توان در یک منفی ضرب شده است):

$$x(t) = a_0 + a_1 e^{j\pi t/2} + \left(a_1 e^{\frac{j\pi t}{2}}\right)^* = a_0 + 2\Re e\{a_1 e^{j\pi t/2}\}$$

ضرایب b_k در بند چهارم مربوط به سیگنال $x\big(-(t-1)\big)$ هستند که حقیقی است. چون معکوس کردن و شیفت زمانی متوسط توان را در یک دوره تناوب تغییر نمی‌دهد و از بند پنجم نتیجه می‌گیریم: $\frac{1}{4}\int_4 |x(-t+1)|^2 dt = \frac{1}{2}$
سپس از قضیه پارسوال نتیجه می‌گیریم:

$$|b_1|^2 + |b_{-1}|^2 = \frac{1}{2}$$

چون $x\big(-(t-1)\big)$ حقیقی و فرد است، ضرایب فرد و موهومی هستند لذا $b_0 = 0$ و $-b_1 = b_{-1}$ و سپس

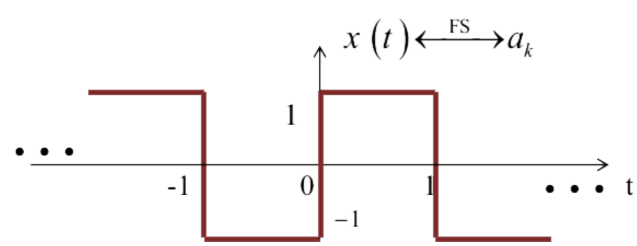
$$|b_1|^2 + |-b_1|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow 2|b_1|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow |b_1|^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow |b_1| = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

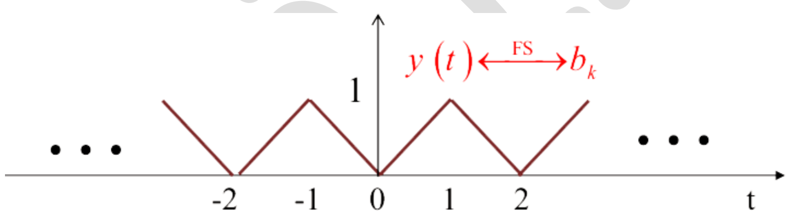
b_1 برابر است با $j/2$ یا $-j/2$.

سپس از بند ۴ نتیجه می‌گیریم که: $a_0 = 0$ و $a_1 = e^{-j\pi/2} b_{-1} = -jb_{-1} = jb_1 = \pm 1/2$ در نتیجه:

$$x(t) = \pm\cos(\pi t/2)$$

← **مثال:** ضرایب سری فوریه سیگنال مثلثی زیر را به دست بیاورید.(سوال)



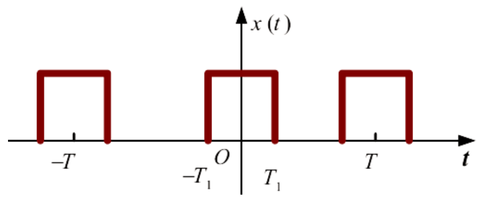


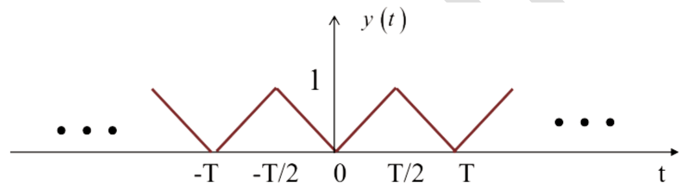
با استفاده از سری فوریه موج مربعی که در قبل به دست آوردیم:

$$x(t)=\frac{dy(t)}{dt} \Rightarrow a_k = jk\omega_0 b_k \qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T}=\pi$$

$$b_k=-\frac{a_k j}{k\pi} \qquad b_k=\begin{cases}0 & k \text{ even}\\ -\left(\dfrac{1}{k\pi}\right)^2 & k \text{ odd}\end{cases}$$

کانولوشن پریودیک: (می‌خواهیم کانولوشن دو سیگنال زیر را محاسبه کنیم.)





$$x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

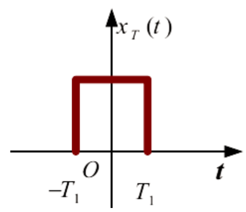
اگر هر دو سیگنال مثبت باشند

$$x(t)*y(t)=+\infty$$

در این حالت کانولوشن تنها در یک دوره از پریود گرفته می‌شود.

$$z(t)=\int_{-T/2}^{T/2}x(\tau)y(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x_T(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

$$x_T(t)=\begin{cases}x(t) & -T/2<t<T/2\\ 0 & otherwise\end{cases}$$



سیگنال حاصل پریودیک است.

$$z(t)=\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau=x(t)\otimes y(t) \qquad x(t)\xleftrightarrow{FS}a_k \qquad y(t)\xleftrightarrow{FS}b_k \qquad z(t)\xleftrightarrow{FS}c_k$$

$$c_k=\frac{1}{T}\int_T z(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_T\left(\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau\right)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$=\int_T\left(\frac{1}{T}\int_T y(t-\tau)e^{-jk\omega_0(t-\tau)}dt\right)x(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau=\int_T b_k x(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau=Ta_kb_k$$

۳-۳- سری فوریه سیگنالهای متناوب زمان گسسته:

سیگنال $x[n]$ زمان گسسته و متناوب است: $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ $\qquad x[n+N] = x[n]$

در سری فوریه تنها $e^{j\omega n}$ که دارای دوره تناوب N است ظاهر می‌شود:

$$\omega N = k2\pi \leftrightarrow \omega = k\omega_0, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

می‌دانیم که تنها N سیگنال اینچنینی وجود دارد.

$$e^{j(k+N)\omega_0 n} = e^{jk\omega_0 n} e^{j\overbrace{N\omega_0 n}^{2\pi n}} = e^{jk\omega_0 n}$$

سری فوریه سیگنال‌های گسسته در حالت کلی به این صورت است:

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k \emptyset_k[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

سیگنال‌های پایه را با $\emptyset_k[n]$ نشان می‌دهیم.

برای بررسی وجود ضرایب فوریه برای یک سیگنال و محاسبه آنها، $x[n]$ را برای N مقدار متوالی محاسبه می‌کنیم. (N معادله، N مجهول)

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} \quad \Downarrow$$

$$x[0] = \sum_{k=<N>} a_k\,, \quad x[1] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0}\,, \quad x[2] = \sum_{k=<N>} a_k e^{j2k\omega_0}$$

$$, \ldots, x[N-1] = \sum_{k=<N>} a_k e^{j(N-1)k\omega_0}$$

برای محاسبه ضرایب از این رابطه استفاده می‌کنیم:

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N & , \ a = 1 \\ \dfrac{1-a^N}{1-a} & , \ a \neq 1 \end{cases}$$

حال اگر $a = e^{jk\omega_0}$ خواهیم داشت(رابطه ۳-۹۰):

$$\sum_{n=<N>} e^{jk\omega_0 n} = \sum_{n=0}^{N-1} (e^{jk\omega_0})^n = \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{jk2\pi/N}\right)^n = \begin{cases} N & , \ k = 0, \pm N, \pm 2N \\ \dfrac{1-e^{jk(2\pi/N)N}}{1-e^{jk\omega_0}} = 0 & , \ a \neq 1 \end{cases}$$

از طرفی داریم:

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jm\omega_0 n} = \sum_{n=<N>}\left(\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}\right)e^{-jm\omega_0 n} = \sum_{k=<N>} a_k\left(\sum_{n=<N>} e^{j(k-m)\omega_0 n}\right)$$

$$= Na_k$$

چون با توجه به رابطه (۳-۹۰) مقدار داخل سیگما فقط در $k = m$ مقدار غیر صفر دارد.

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$a_{k+N} = a_k$$

مثال: سری فوریه سیگنال زیر را محاسبه کنید:

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{8}\right) + \cos\left(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$N = 16, \omega_0 = \frac{\pi}{8}$$

$$x[n] = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right] + \frac{1}{2}\left[e^{\frac{j\pi}{4}}e^{j2\omega_0 n} + e^{-\frac{j\pi}{4}}e^{-j2\omega_0 n}\right] \Longrightarrow$$

$$a_0 = 0,\ \ a_1 = \frac{1}{2},\ \ a_{-1} = \frac{1}{2},\ \ a_2 = \frac{e^{\frac{j\pi}{4}}}{2},\ \ a_{-2} = \frac{e^{-\frac{j\pi}{4}}}{2},\ \ a_3 = a_{-3} = 0$$

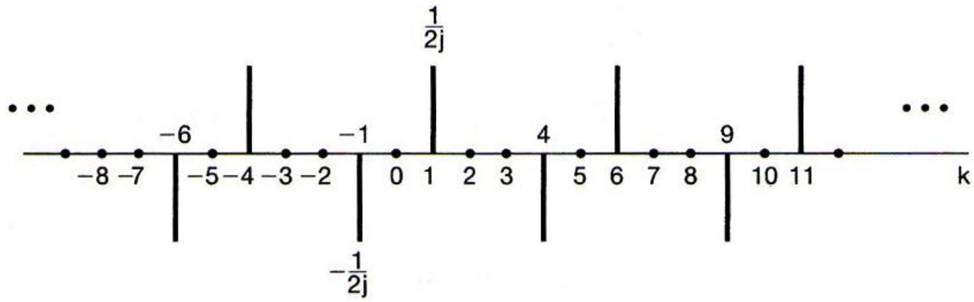
مثال: سری فوریه سیگنال $x[n] = sin(\omega_0 n)$ را محاسبه کنید.

دو حالت ممکن است اتفاق بیافتد. اول اینکه $\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{N}$ باشد

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{N} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{N} \Longrightarrow x[n] = \frac{1}{2j}e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} - \frac{1}{2j}e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \Longrightarrow$$

$$a_1 = \frac{1}{2j},\ \ a_{-1} = -\frac{1}{2j}$$

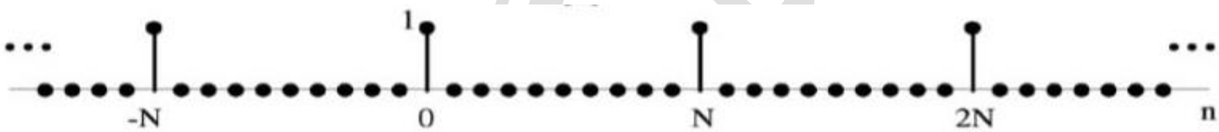
به عنوان مثال اگر $N = 5$ باشد، همانند شکل زیر ضرایب هر ۵ واحد یک بار تکرار می‌شوند:



حالت دوم: اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که $\frac{2\pi}{\omega_0}$ برابر نسبت دو عدد صحیح هستند که هیچ عامل مشترکی ندارند.

$$\omega_0 = \frac{M}{N}2\pi \Longrightarrow x[n] = \frac{1}{2j}e^{jM\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} - \frac{1}{2j}e^{-jM\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \Longrightarrow a_M = \frac{1}{2j},\ \ a_{-M} = -\frac{1}{2j}$$

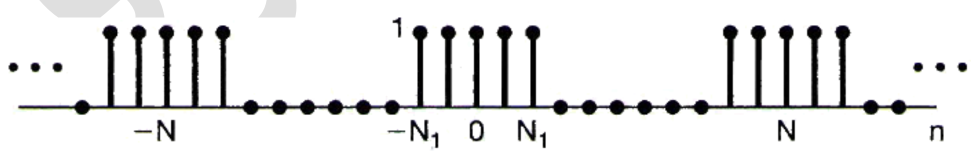
مثال: سری فوریه قطار ضربه زیر را بدست آورید:



$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN]$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}$$

مثال: سری فوریه سیگنال زیر را محاسبه کنید: (سوال)



برای محاسبه ضرایب از این رابطه استفاده می‌کنیم:

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N & if \quad a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & if \quad a \neq 1 \end{cases}$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{+N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{2N_1}\left(e^{-jk\frac{2\pi}{N}}\right)^{n-N_1}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2N_1+1}{N} & k = mN \\ \dfrac{1}{N}\dfrac{e^{-jk\frac{2\pi}{N}(N_1)} - e^{-jk\frac{2\pi}{N}(N_1+1)}}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}} & k \neq mN \end{cases}$$

$$= \frac{1}{N}\frac{e^{-jk\frac{\pi}{N}}\left\{e^{-jk\frac{2\pi}{N}\left(N_1+\frac{1}{2}\right)} - e^{-jk\frac{2\pi}{N}\left(N_1+\frac{1}{2}\right)}\right\}}{e^{-jk\frac{\pi}{N}}\left(e^{jk\frac{\pi}{N}} - e^{-jk\frac{\pi}{N}}\right)} \Rightarrow$$

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{2N_1+1}{N} & k = mN \\ \dfrac{1}{N}\dfrac{\sin[2\pi k(N_1+1/2)/N]}{\sin(\pi k/N)} & k \neq mN \end{cases}$$

ویژگی‌های سری فوریه گسسته

خواص سری فوریه گسسته دقیقاً شبیه خواص سری فوریه پیوسته است.

$$x[n] \leftrightarrow a_k \;, \qquad y[n] \leftrightarrow b_k$$

- خطی بودن:

$$\alpha x[n] + \beta y[n] \leftrightarrow \alpha a_k + \beta b_k$$

- شیفت در حوزه زمان:

$$x[n-n_0] \leftrightarrow a_k e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n_0}$$

- شیفت در حوزه فرکانس:

$$e^{jM\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} x[n] \leftrightarrow a_{k-M}$$

- قرینه کردن زمانی:

$$x[-n] \leftrightarrow a_{-k}$$

- کانولوشن پریودیک:

$$\sum_{r=<N>} x[r]y[n-r] \leftrightarrow N a_k b_k$$

- مزدوج گیری:

$$x^*[n] \leftrightarrow a_{-k}^*$$

- اگر $x[n]$ حقیقی باشد:

$$\begin{cases} a_{-k} = a_k^* \\ Re\{a_k\} = Re\{a_{-k}\} \\ Im\{a_k\} = -Im\{a_{-k}\} \\ |a_k| = |a_{-k}| \\ \sphericalangle a_{-k} = -\sphericalangle a_k \end{cases}$$

- قضیه پارسوال برای سیگنال‌های پریودیک

$$\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} |x[n]|^2 = \sum_{n=<N>} |a_k|^2$$

- مقیاس زمانی

$$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{m}\right] & n \text{ is a multiple of } m \\ 0 & n \text{ is not a multiple of } m \end{cases} \leftrightarrow \frac{1}{m}a_k$$

- تفاضل

$$x[n] - x[n-1] \leftrightarrow \left(1 - e^{jk\omega_0}\right)a_k$$

- مجموع

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \leftrightarrow \left(\frac{1}{1 - e^{jk\omega_0}}\right) a_k$$

پاسخ فرکانسی

در حالت پیوسته:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} H(jk\omega_0)\, a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k \rightarrow \underbrace{H(jk\omega_0)}_{\text{Gain}}\, a_k \qquad H(jk\omega_0)=\left|H(jk\omega_0)\right| e^{<H(jk\omega_0)}$$

شامل اندازه و فاز است

در حالت گسسته:

$$x[n]=\sum_{n=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \rightarrow \boxed{H[n]} \rightarrow y[n]=\sum_{n=\langle N\rangle} H\left(e^{jk\omega_0 n}\right) a_k e^{jk\omega_0 n}$$

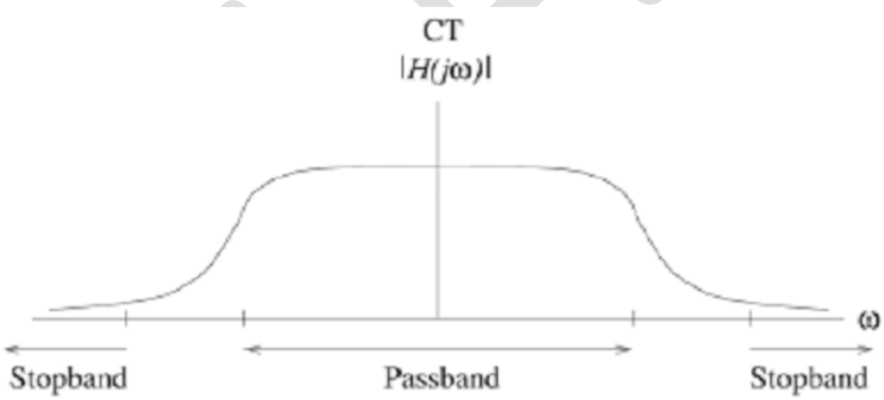
$$a_k \rightarrow \underbrace{H\left(e^{jk\omega_0}\right)}_{\text{Gain}}\, a_k \qquad H\left(e^{jk\omega_0}\right)=\left|H\left(e^{jk\omega_0}\right)\right| e^{<H\left(e^{jk\omega_0}\right)}$$

شامل اندازه و فاز است

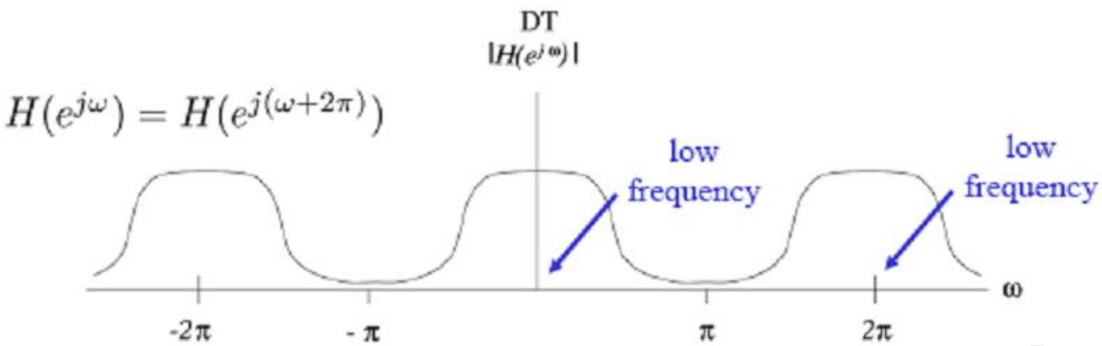
فیلتر کردن

در برخی کاربردها لازم است برخی فرکانس‌ها را حذف کرده و یا اندازه آنها را تغییر دهیم. به چنین فرایندی فیلتر کردن می‌گویند. به اولی فیلترهای انتخاب فرکانس (Frequency selective filtering) و به دومی فیلترهای شکل دهی فرکانس (Frequency shaping filtering) می‌گویند.

فیلترهای پایین گذر:



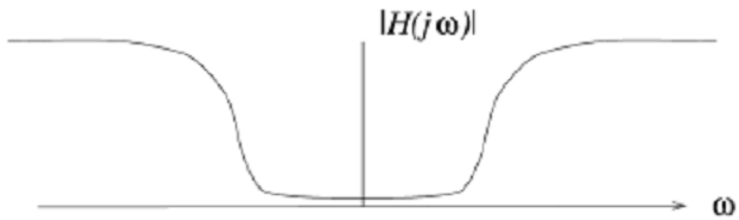
از عبور فرکانس های بالا جلوگیری می کند



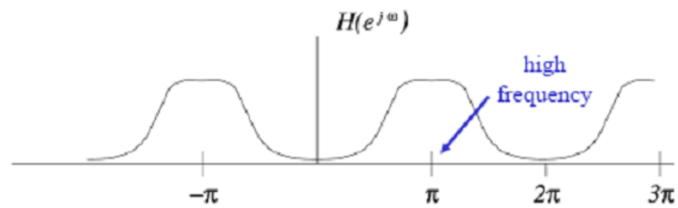
برای حالت گسسته

فیلتر بالاگذر:

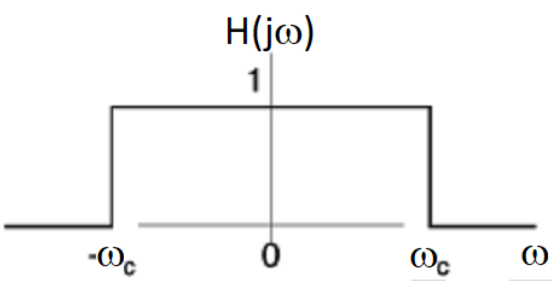
پیوسته در زمان CT

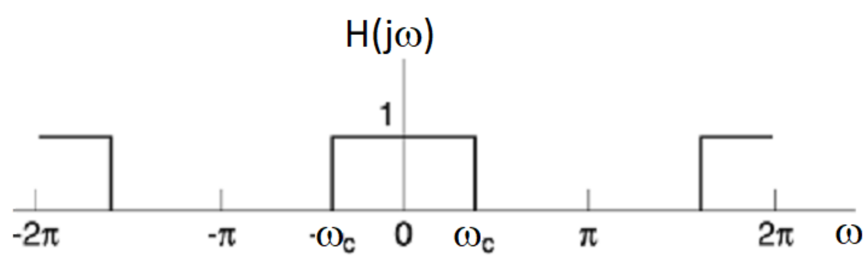


گسسته در زمان DT



در حالت ایده آل فیلتر برای همه فرکانسهایی که باید عبور دهد به طور یکسان عمل می‌کند در شکل زیر این نوع فیلتر نمایش داده شده است:





مثال: سیگنال $x[n]$ سیگنالی حقیقی و فرد است با دوره تناوب ۷ و برخی از ضرایب آن برابر هستند با:

$$a_{15} = j, \quad a_{16} = 2j, \quad a_{17} = 3j$$

ضرایب دیگر آن را بنویسید.

$$a_0 = 0, \quad a_1 = a_{15} = j, \quad a_2 = a_{16} = 2j, \quad a_3 = a_{17} = 3j$$

$$a_{-1} = a_1^* = -j, \quad a_{-2} = a_2^* = -2j, \quad a_{-3} = a_3^* = -3j$$

فصل چهارم (تبدیل فوریه پیوسته)

تبدیل فوریه پیوسته

فهرست مطالب:

- تبدیل فوریه
- تبدیل فوریه سیگنال‌های متناوب
- خواص تبدیل فوریه

تبدیل فوریه:

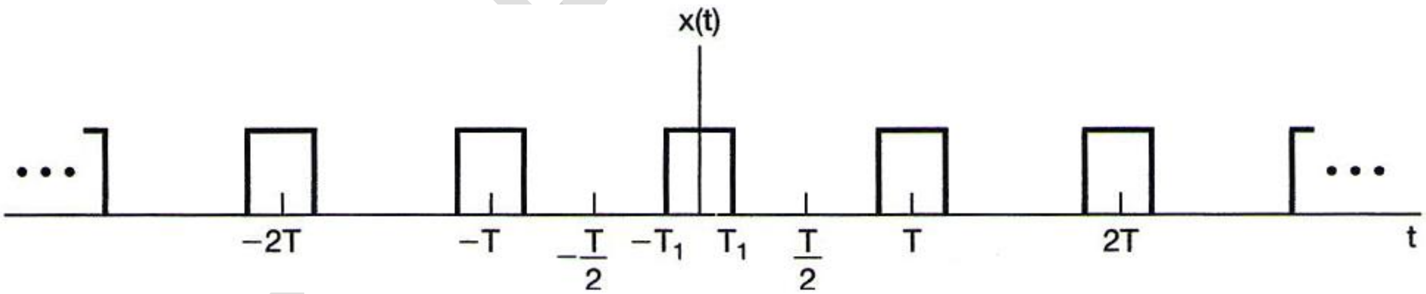
همانگونه که در فصل قبلی گفته شد، با استفاده از سری فوریه می‌توان سیگنال‌های متناوب را آنالیز کرد:

معادله سنتز
$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

معادله آنالیز
$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

سؤال: برای آنالیز سیگنال‌های غیر متناوب چه باید کرد؟

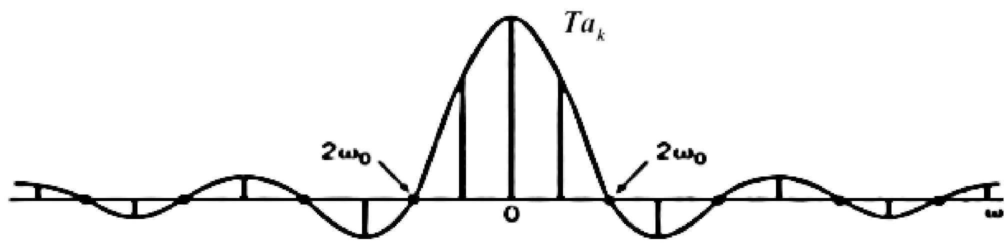
سیگنال مربعی زیر را در نظر بگیرید:

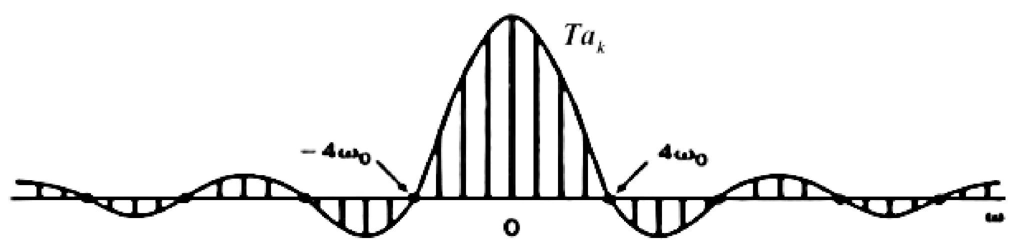


ضرایب سری فوریه این سیگنال متناوب به صورت زیر هستند:

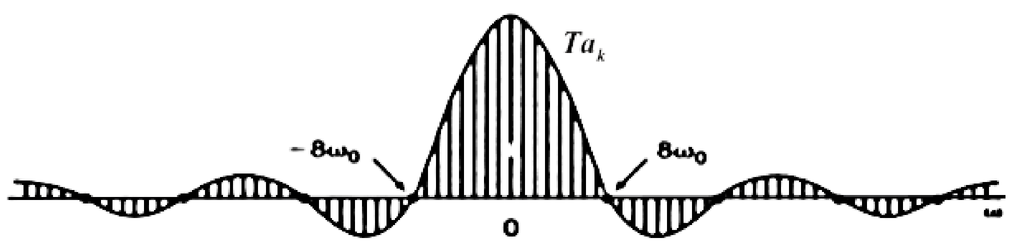
$$a_k=\frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}=\frac{2T_1}{T}\text{sinc}(k\omega_0 T_1)\longrightarrow Ta_k=2T_1\,\text{sinc}(\omega T_1)\Big|_{\omega=k\omega_0}$$

این ضرایب به صورت نمودار میله‌ای هستند که پوش آنها به شکل تابع سینک است:





(b)



(c)

برای سیگنال‌های غیر متناوب از تبدیل فوریه استفاده می‌شود. تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ با $X(j\omega)$ نمایش داده می‌شود.

محاسبه تبدیل فوریه:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$a_k = \frac{1}{T}X(k\omega_0)$$ ضرایب سری فوریه مرتبط

ضرایب سری فوریه یک موج پریودیک، $\frac{1}{T}$ ضرب در نمونه‌های تبدیل فوریه یک پریود آن هستند.

محاسبه معکوس تبدیل فوریه و به دست آوردن سیگنال $x(t)$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

نکته: تبدیل فوریه در هر ω چگالی محتوای فرکانسی را می‌دهد. پس اگر به عنوان مثال سیگنال از جنس ولتاژ باشد واحد محور عمودی در نمودار تبدیل فوریه آن ولت بر هرتز است.

نماد تبدیل فوریه و بالعکس به این صورت است: $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$

شرایطی که می‌توان تحت آنها تبدیل فوریه گرفت به این صورت است:

- $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$
- در یک بازه زمانی محدود تعداد محدودی ماکزیمم و مینیمم داشته باشد.
- در یک بازه زمانی محدود تعداد محدودی نقاط گسستگی داشته باشد.

مثال: تبدیل فوریه سیگنال‌های زیر را به دست آورید:

$$x(t) = \delta(t)$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \Rightarrow \delta(t) \xleftrightarrow{FT} 1$$

$$x(t) = \delta(t - t_0)$$

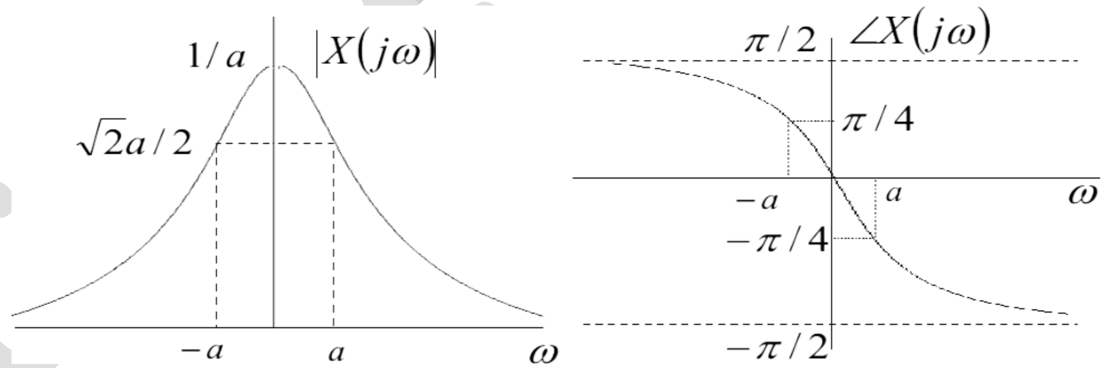
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0} \Rightarrow \delta(t - t_0) \xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega t_0}$$

$$x(t) = e^{-at} u(t) \quad a > 0$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \frac{1}{a + j\omega}$$

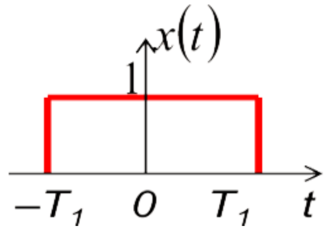
$$\Rightarrow e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{a + j\omega}$$

در مثال اخیر اندازه (سمت چپ) و زاویه (سمت راست) $X(j\omega)$ به این صورت است:



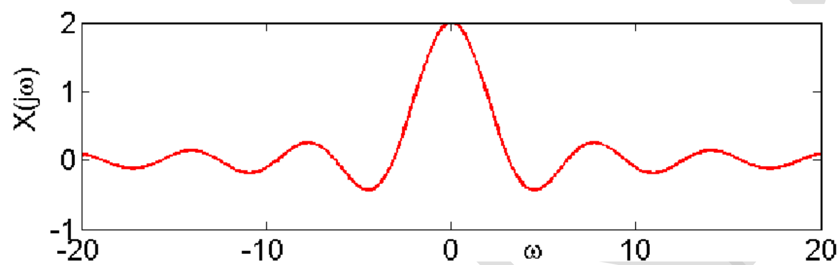
$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \le T_1 \\ 0 & |t| > T_1 \end{cases}$$

شکل این تابع به صورت زیر است:



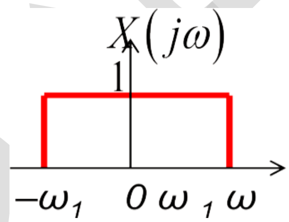
$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-T_1}^{T_1}=\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}=\frac{2T_1\sin(\omega T_1)}{\omega T_1}$$

$$=2T_1\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$



$T_1 = 1$

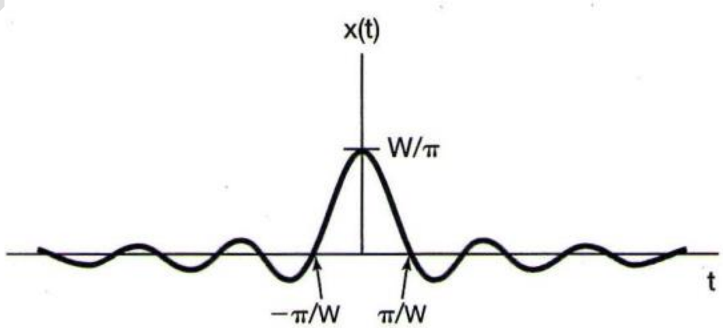
مثال: معکوس تبدیل فوریه $X(j\omega)$ را به دست آورید:



$$X(j\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|\le\omega_1\\ 0 & \text{درغیراینصورت}\end{cases}$$

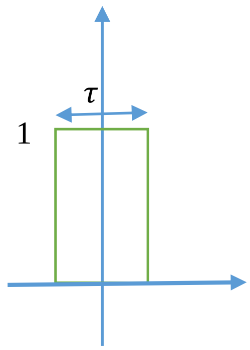
$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_1}^{\omega_1}e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\times\frac{1}{jt}e^{j\omega t}\Big|_{-\omega_1}^{\omega_1}=\frac{\sin(\omega_1 t)}{\pi t}$$

$$\Longrightarrow x(t)=\frac{\omega_1}{\pi}sinc\left(\frac{\omega_1 t}{\pi}\right)$$



تابع سینک غیر نرمال $\frac{\sin(t)}{t}$ تابع سینک نرمال شده $\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

انتگرال تابع سینک نرمال شده از منهای بینهایت تا بینهایت، یک است. در این جزوه سینک نرمال شده مدنظر است.



$$\xleftrightarrow{\text{F}} \tau\,\text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right) = \tau\,\text{sinc}(f\tau)$$

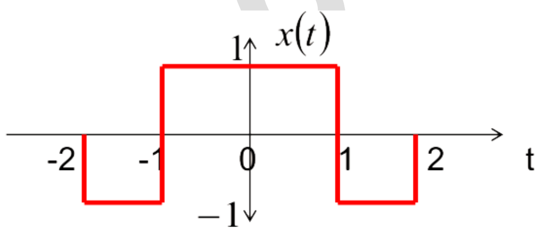
خواص تبدیل فوریه

1- خطی بودن

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \text{ و } y(t) \xleftrightarrow{F} Y(j\omega)$$

$$ax(t) + by(t) \xleftrightarrow{F} aX(j\omega) + bY(j\omega)$$

به عنوان مثال سیگنال زیر را در نظر بگیرید. این سیگنال ترکیبی از دو سیگنال مربعی است. با استفاده از تبدیل فوریه دو سیگنال مربعی می‌توان با سادگی بیشتر به تبدیل فوریه سیگنال اصلی رسید:



$$x(t) \xleftrightarrow{\text{F}} \frac{4\sin\omega - 2\sin 2\omega}{\omega}$$

$$x_1 \xleftrightarrow{F} 2 * \frac{2\sin(\omega)}{\omega}, x_2 \xleftrightarrow{F} \frac{2 * 2\sin(\omega * 2)}{\omega * 2} = \frac{2\sin(2\omega)}{\omega}$$

2- شیفت زمانی

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$

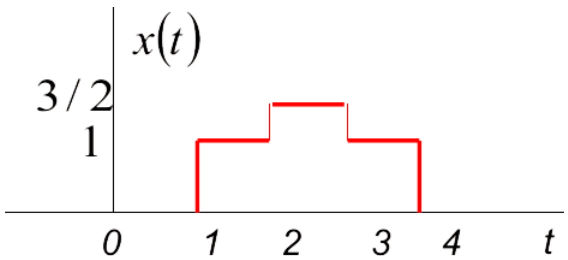
اندازه تبدیل، بدون تغییر خواهد ماند:

$$\left|X(j\omega)e^{-j\omega t_0}\right| = |X(j\omega)|$$

فاز تبدیل به صورت خطی تغییر می‌کند:

$$\angle\left(X(j\omega)e^{-j\omega t_0}\right) = \angle X(j\omega) - \omega t_0$$

مثال: تبدیل فوریه سیگنال شکل را به دست آورید:



$$X(j\omega) = e^{-j5\omega/2}\left\{\frac{\sin(\omega/2) + 2\sin(3\omega/2)}{\omega}\right\}$$

همگرایی تبدیل فوریه

در چه شرایطی می‌توان از سیگنال تبدیل فوریه گرفت؟

- به طور مطلق انتگرال پذیر باشد.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt < \infty$$

- در یک بازه محدود تعداد محدودی ماکزیمم و مینیمم داشته باشد.
- در یک بازه محدود تعداد نقاط گسستگی محدود باشد.

تبدیل فوریه سیگنال متناوب

✓ سیگنال‌های متناوب در شرط اول دریکله صدق نمی‌کنند. نوعی از تبدیل فوریه سیگنال‌های متناوب و غیر متناوب را می‌توان از ضرایب سری فوریه به دست آورد. این تبدیل متشکل از قطاری از ضربه‌ها (با مساحت متناسب با ضرایب سری فوریه) در حوزه فرکانس است.

فرض کنید $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ باشد.

بر این اساس: $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega t}d\omega = e^{j\omega_0 t}$

در نتیجه: $e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

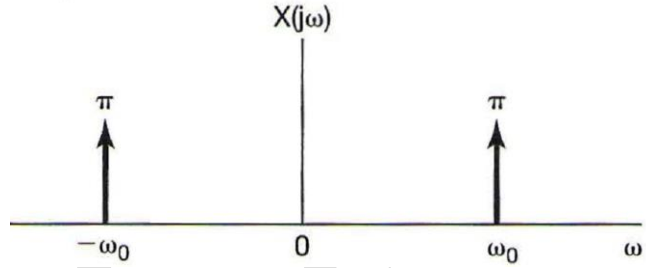
در حالت کلی‌تر می‌توان رابطه سری فوریه و تبدیل فوریه را مشاهده کرد:

$$x(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} \sum_{-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega-k\omega_0)$$

مثال: تبدیل فوریه $\cos(\omega_0 t)$ را به دست آورید.

$$x(t)=\cos(\omega_0 t)=\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$$

$$X(j\omega)=\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$$



$$x(t)=\sin(\omega_0 t)=\frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t}-\frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t}$$

$$X(j\omega)=\frac{\pi}{j}\delta(\omega-\omega_0)-\frac{\pi}{j}\delta(\omega+\omega_0)$$

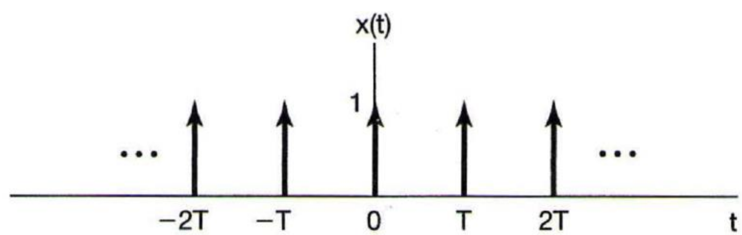
$$\sin\big(\omega_0(t-t_0)\big) \xleftrightarrow{F} \left(\frac{\pi}{j}\delta(\omega-\omega_0)-\frac{\pi}{j}\delta(\omega+\omega_0)\right)e^{-j\omega t_0}$$

تبدیل فوریه سیگنال $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$ را محاسبه کنید:

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt=\frac{1}{T},\forall k$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} \sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi\frac{1}{T}\delta(\omega-k\omega_0)$$

$$X(j\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)$$



همان گونه که مشخص است با افزایش فاصله پالسها در حوزه زمان فاصله پالسها در حوزه فرکانس کم می‌شود.

خواص تبدیل فوریه:

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$$

$$x(-t) \xleftrightarrow{F} X(-j\omega) \qquad x^*(t) \xleftrightarrow{F} X^*(-j\omega)$$

اگر $x(t)$ حقیقی باشد:

$$x(t) = x^*(t) \Rightarrow X(j\omega) = X^*(-j\omega)\,, \begin{cases} Re\{X(-j\omega)\} = Re\{X(j\omega)\} \text{زوج} \\ Im\{X(-j\omega)\} = -Im\{X(j\omega)\} \text{فرد} \end{cases}$$

$$x(t) = x^*(t) \Rightarrow \begin{cases} |X(-j\omega)| = |X(j\omega)| \text{زوج} \\ \angle X(-j\omega) = -\angle X(j\omega) \text{فرد} \end{cases}$$

$x(t)$ حقیقی و زوج $\Longrightarrow X(j\omega)$ حقیقی و زوج

$x(t)$ حقیقی و فرد $\Longrightarrow X(j\omega)$ موهومی و فرد

$$Ev\{x(t)\} \xleftrightarrow{F} Re\{X(j\omega)\} \qquad Od\{x(t)\} \xleftrightarrow{F} j\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \Rightarrow X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$$

مثال: برای $a > 0$ تبدیل فوریه $e^{-a|t|}$ را به دست آورید.

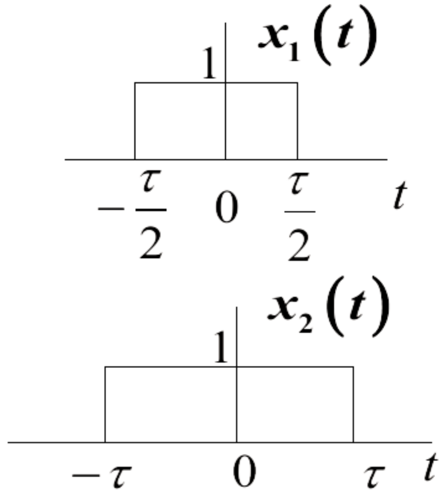
$e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$ حقیقی و زوج $\quad e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{j\omega+a}$ $\quad for\ t > 0$

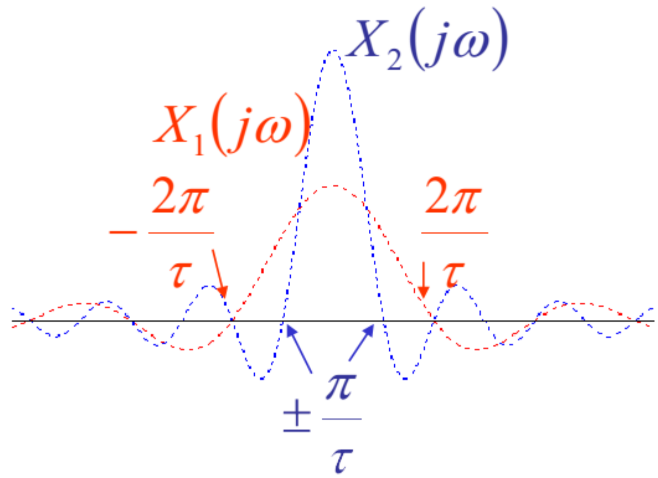
$$e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) = 2\left(\frac{e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)}{2}\right) = 2Ev\{e^{-at}u(t)\}$$

$$2Ev\{e^{-at}u(t)\} \xleftrightarrow{FT} 2Re\left\{\frac{1}{j\omega + a} \times \frac{a - j\omega}{a - j\omega}\right\} = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$

مقیاس زمان و فرکانس:

$$x(at) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right) \qquad x(at) \xleftrightarrow{FS} a_k$$





گسترش در حوزه زمان منجر به فشردگی در حوزه فرکانس می‌شود وبالعکس.

خواص دیگر:

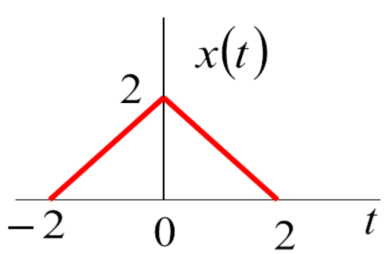
$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{FT} j\omega X(j\omega) \qquad \frac{d^n x(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{FT} (j\omega)^n X(j\omega) \qquad x^{(n)}(t) \xleftrightarrow{FS} (jk\omega_0)^n a_k$$

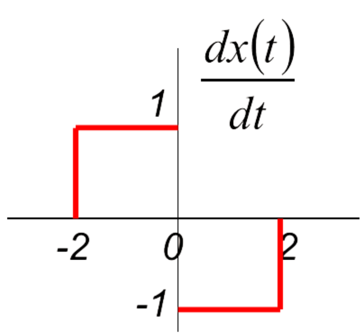
$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

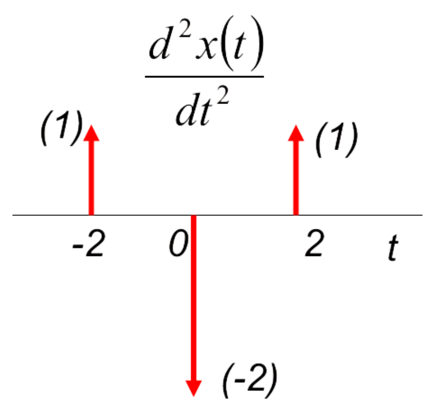
$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{FS} \frac{1}{jk\omega_0}a_k \qquad (for\ x(t), a_0 = 0)$$

مثال:

$$\delta(t) \xleftrightarrow{FT} 1 \qquad u(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$







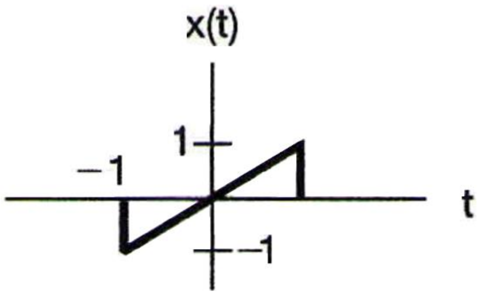
$$X(j\omega) = \frac{4\sin^2\omega}{\omega^2}$$

$$Y(j\omega) = \pi Z(0)\delta(\omega) + \frac{Z(j\omega)}{j\omega}, Z(j\omega) = -2 + 2\cos(2\omega) = -4\sin^2(\omega) \Longrightarrow$$

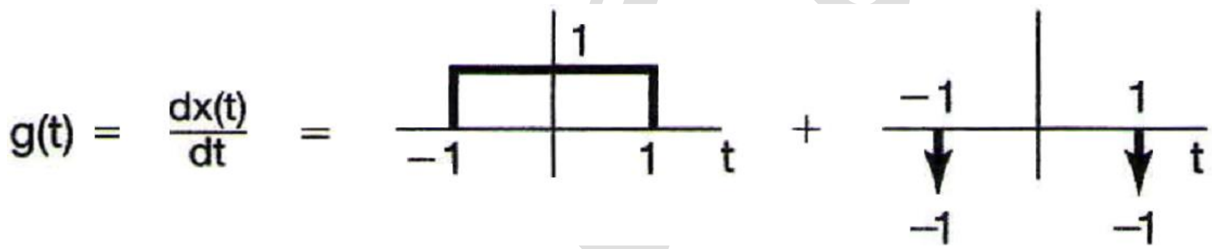
$$Y(j\omega) = \frac{-4\sin^2(\omega)}{j\omega}$$

مثال:

تبدیل فوریه سیگنال زیر را به دست آورید:



از مشتق این تابع $\left(g(t) = \frac{dx(t)}{dt}\right)$ استفاده می‌کنیم.



$$G(j\omega) = \frac{2\sin(j\omega)}{j\omega} - (e^{j\omega} - e^{-j\omega}) \Longrightarrow X(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{j\omega} + \pi G(0)\delta(\omega)$$

$$X(j\omega) = \frac{2\sin(j\omega)}{j\omega^2} - \frac{2\cos(j\omega)}{j\omega}$$

خواص تبدیل فوریه (ادامه): کانولوشن

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \qquad h(t) \xleftrightarrow{F} H(j\omega)$$

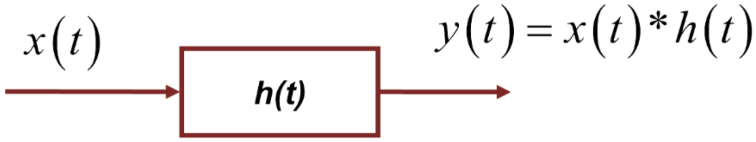
$$y(t) = x(t) * h(t) \qquad Y(j\omega) = x(j\omega)H(j\omega)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \qquad Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau\right)e^{-j\omega t}\,dt$$

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\,e^{-j\omega t}\,dt\right)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega t}H(j\omega)d\tau$$

$$= H(j\omega)\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega t}d\tau = H(j\omega)X(j\omega)$$

مثال: خروجی سیستم زیر را به ازاء ورودی $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ به دست آورید.



$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

$$e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega-\omega_0) \Longrightarrow Y(j\omega) = H(j\omega)2\pi\delta(\omega-\omega_0) = 2\pi H(j\omega_0)\delta(\omega-\omega_0)$$

$$\Longrightarrow y(t) = H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}$$

رابطه پارسول:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\, d\omega}^{\text{طیف چگالی انرژی}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega)e^{-j\omega t}\, d\omega\right] dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\, dt\right] d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega)X(j\omega)\, d\omega$$

خاصیت ضرب

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \qquad h(t) \xleftrightarrow{F} H(j\omega)$$

$$y(t) = x(t) \times h(t) \qquad Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi}[x(j\omega) * H(j\omega)]$$

شیفت در حوزه فرکانس

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \qquad x(t)e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} X\big(j(\omega-\omega_0)\big)$$

$$y(t) = x(t)p(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{2\pi}[X(j\omega) * P(j\omega)]$$

$$p(t) = \cos\omega_0 t \xleftrightarrow{FT} \pi[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)]$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2}\Big[X\big(j(\omega-\omega_0)\big) + X\big(j(\omega+\omega_0)\big)\Big]$$

خواص کانولوشن

خاصیت جابه‌جایی

خاصیت جابه‌جایی (Commutative Property) کانولوشن دو سیگنال به صورت زیر بیان می‌شود:

$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$$

خاصیت توزیع‌پذیری

برای بیان خاصیت توزیع‌پذیری (Distributive Property) به عنوان مثال در مورد کانولوشن سه سیگنال می‌توان نوشت:

$$x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] + [x_1(t) * x_3(t)]$$

خاصیت شرکت‌پذیری

خاصیت شرکت‌پذیری (Associative Property) سیگنال‌ها در کانولوشن به صورت زیر است:

$$x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t)$$

خاصیت انتقال

کانولوشن همچنین دارای خاصیت انتقال (Shifting Property) است که به صورت زیر می‌توان آن را بیان کرد:

$$x_1(t) * x_2(t) = y(t)$$

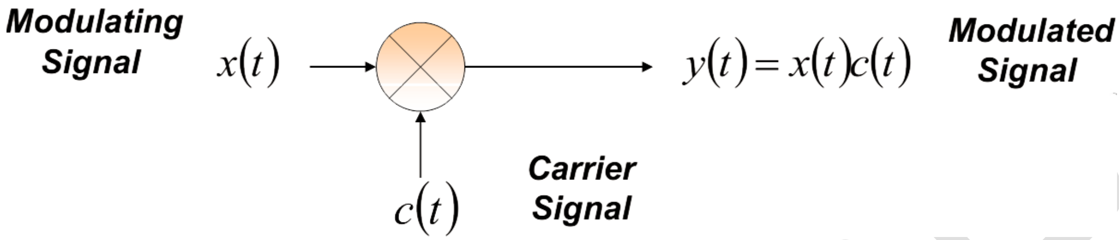
$$x_1(t) * x_2(t - t_0) = y(t - t_0)$$

$$x_1(t - t_0) * x_2(t) = y(t - t_0)$$

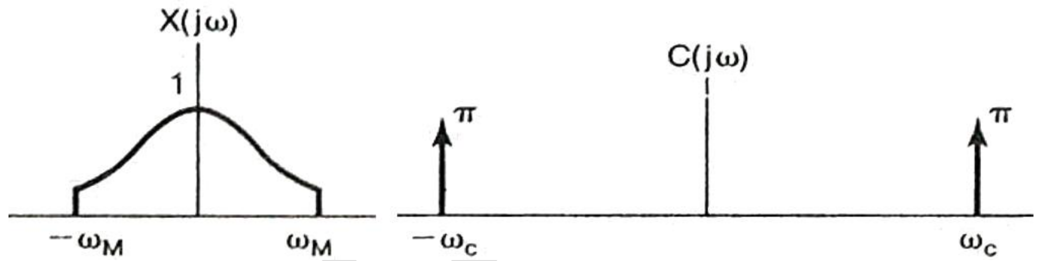
$$x_1(t - t_0) * x_2(t - t_1) = y(t - t_0 - t_1)$$

مدولاسیون دامنه

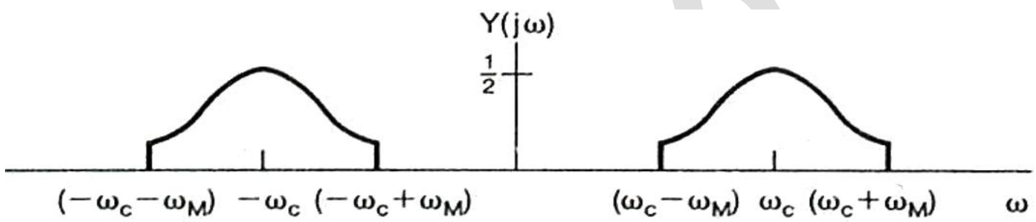
در این مدولاسیون، سیگنال در حامل ضرب می‌شود.



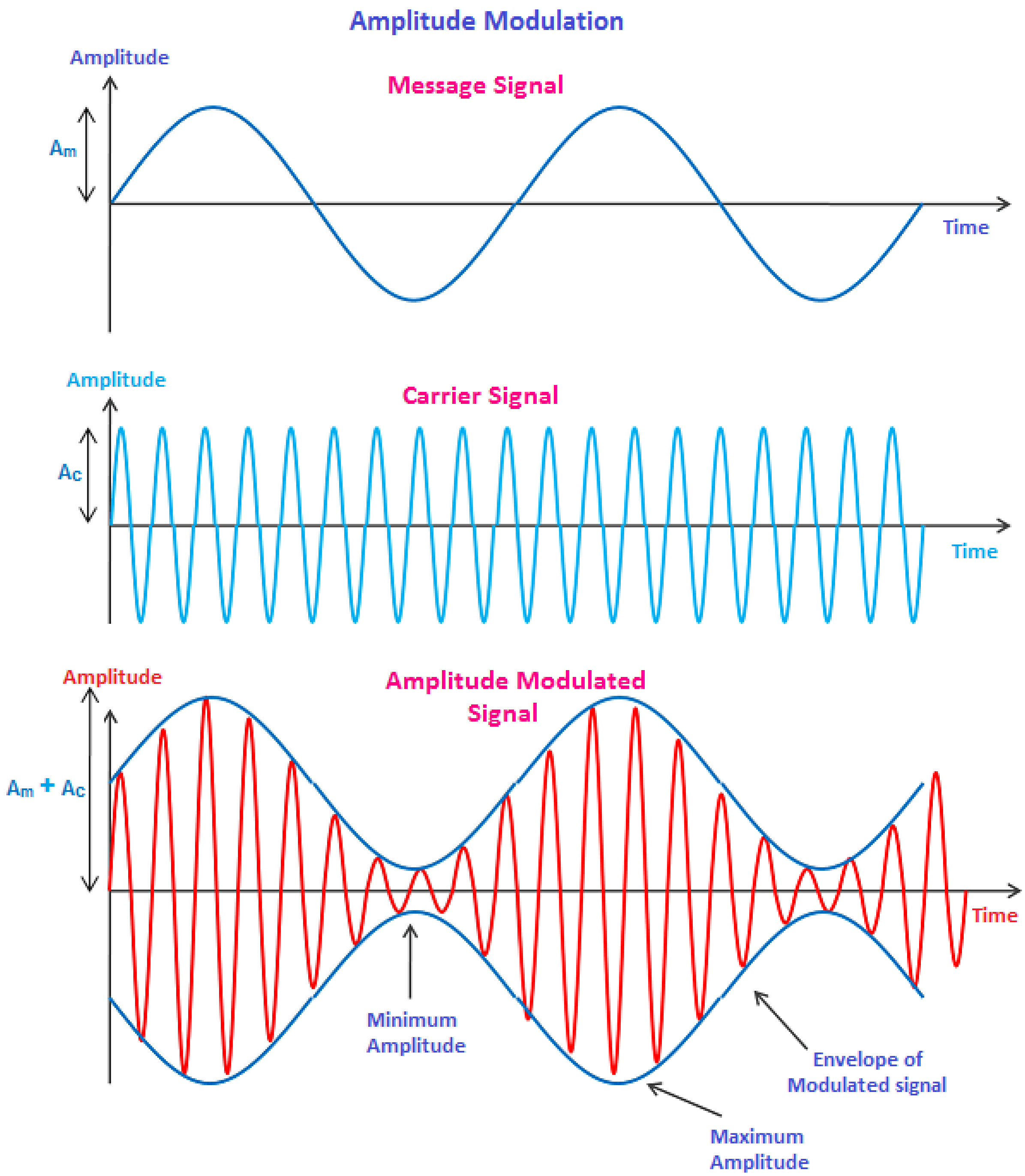
نتیجه ضرب سیگنالهایی با تبدیل فوریه زیر چه می‌شود؟



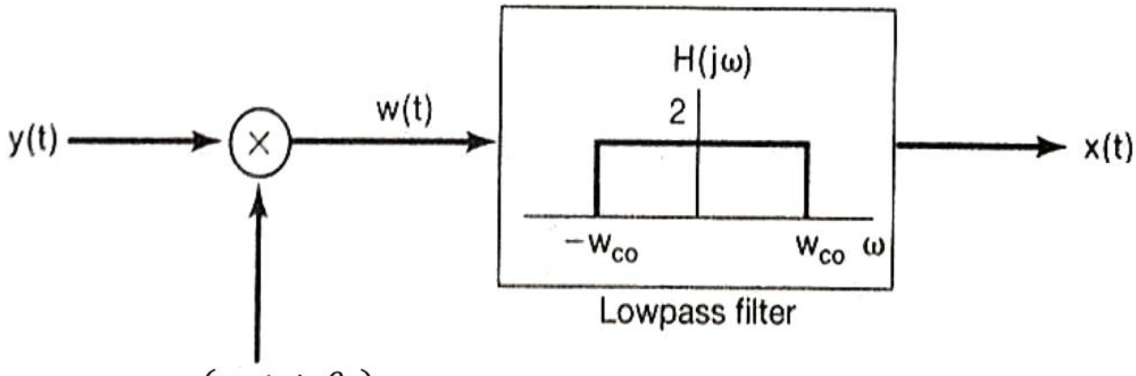
نتیجه از کانولوشن این دو سیگنال در حوزه فرکانس به دست می‌آید.



شکل زیر مدولاسیون دامنه را نشان می‌دهد:

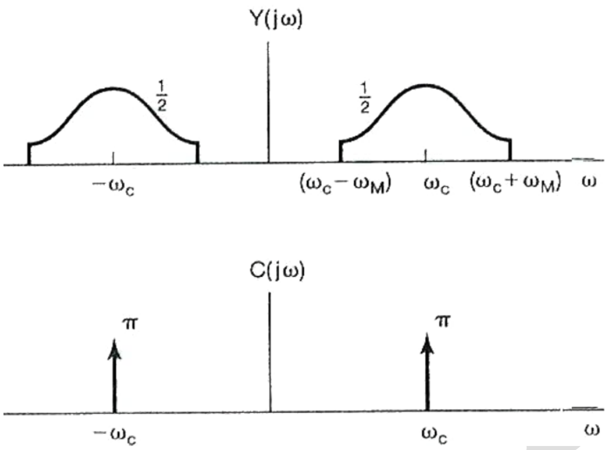


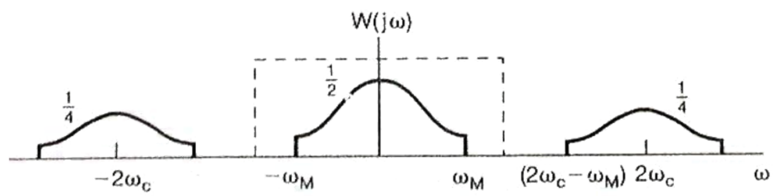
بلوک دیاگرام زیر، یک سیستم دمودولاسیون را نشان می‌دهد:



$$w(t) = y(t)c(t) = x(t)\cos^2 \omega_c t = \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(t)\cos 2\omega_c t$$

$$W(j\omega) = \frac{1}{2}X(j\omega) + \frac{1}{4}X(j\omega - j2\omega_c) + \frac{1}{4}X(j\omega + 2j\omega_c)$$

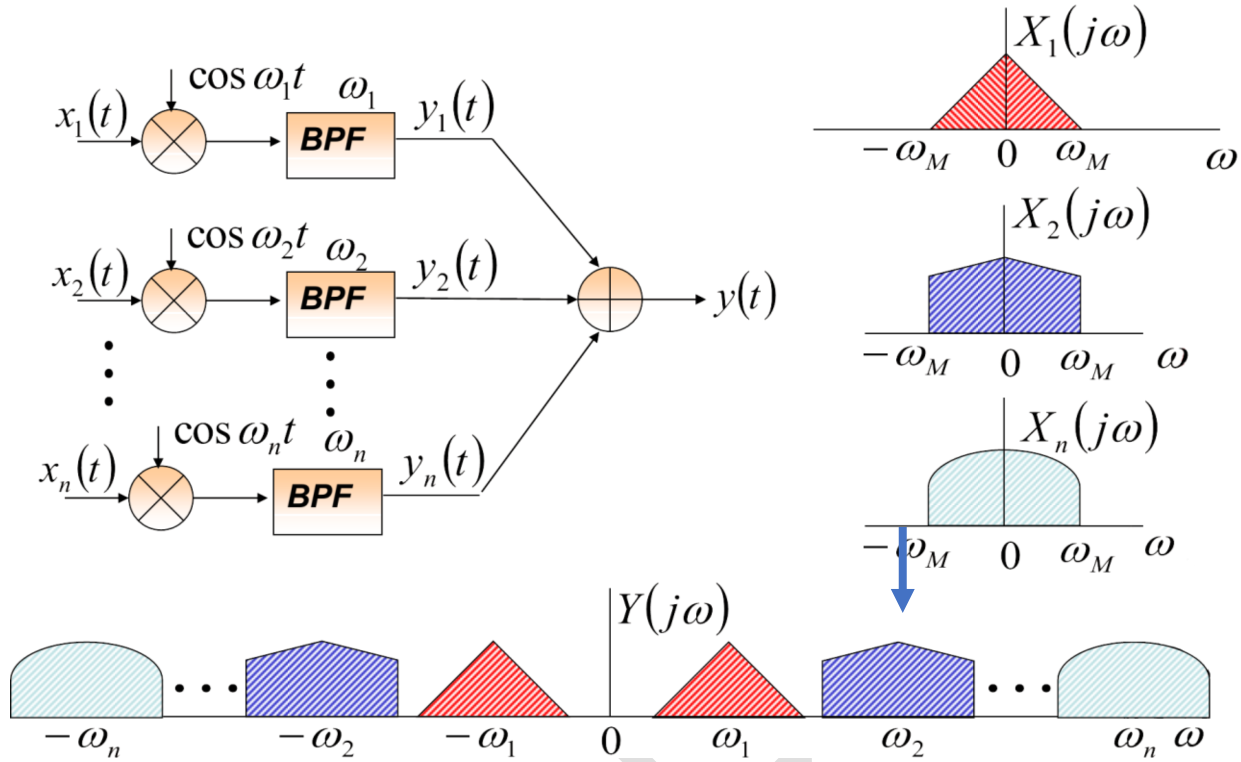




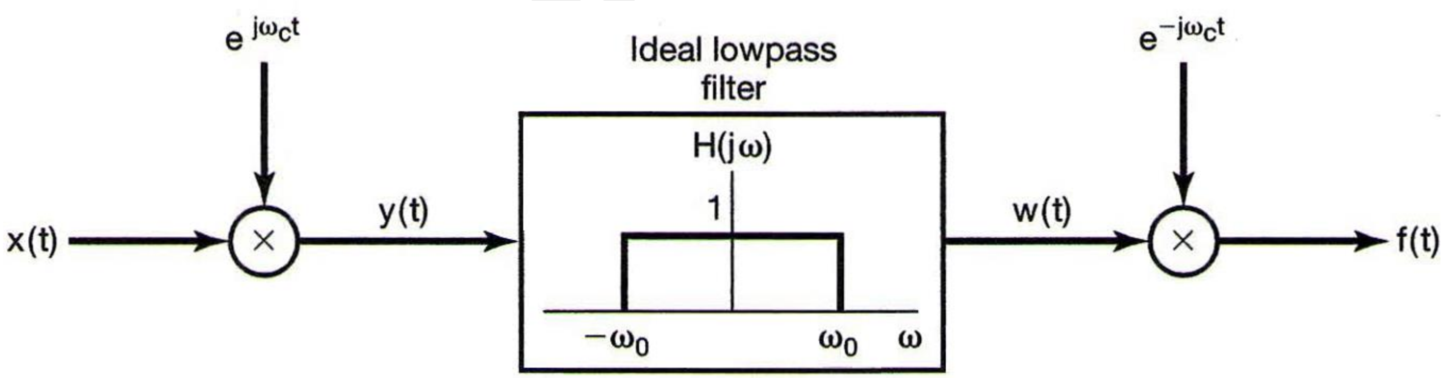
تسهیم سازی با تقسیم فرکانس (Frequency division multiplexing):

در این نوع تسهیم سازی که برای انتقال چند کانال مختلف فرکانسی در قالب یک سیگنال استفاده می‌شود، هر سیگنال ورودی در یک موج کسینوسی با فرکانس مشخص ضرب می‌شود و نتیجه با هم جمع می‌شود، در گیرنده با استفاده از فیلترهای فرکانسی از هم جدا می‌شوند.

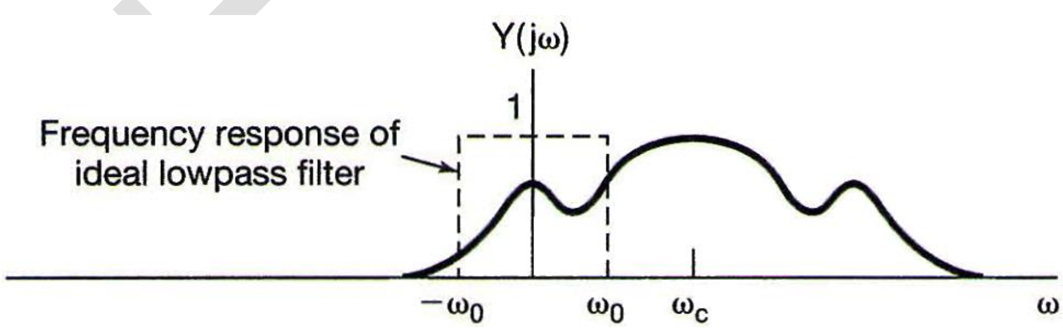
شکل زیر این عملکرد را نمایش می‌دهد.



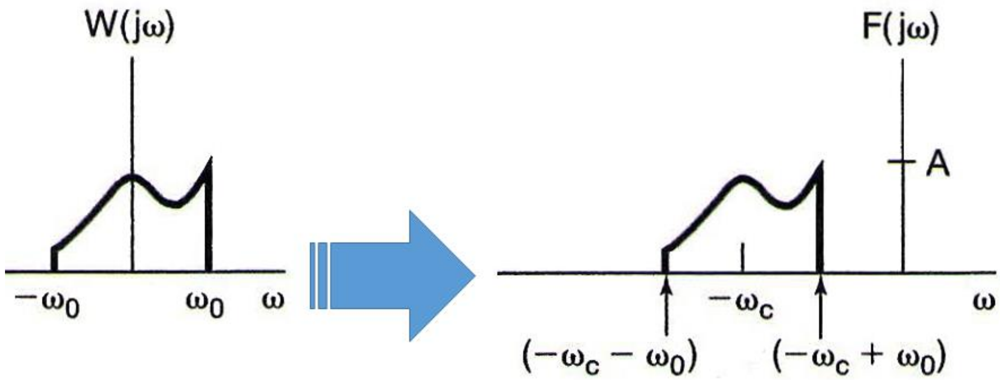
عملکرد فیلتر عبور دهنده بخشی از سیگنال با استفاده از فیلتر پایین گذر به این صورت است: در اینجا فقط با تغییر ω_c عملکرد فیلتر تغییر می‌کند. $\omega_c=\omega_0, \omega_c=\omega_1, \dots, \omega_c=\omega_n$



در این سیستم ابتدا یک شیفت در حوزه فرکانس انجام می‌شود.



سپس فیلتر اعمال می‌شود و شیفت در جهت مقابل قبلی اعمال می‌شود.



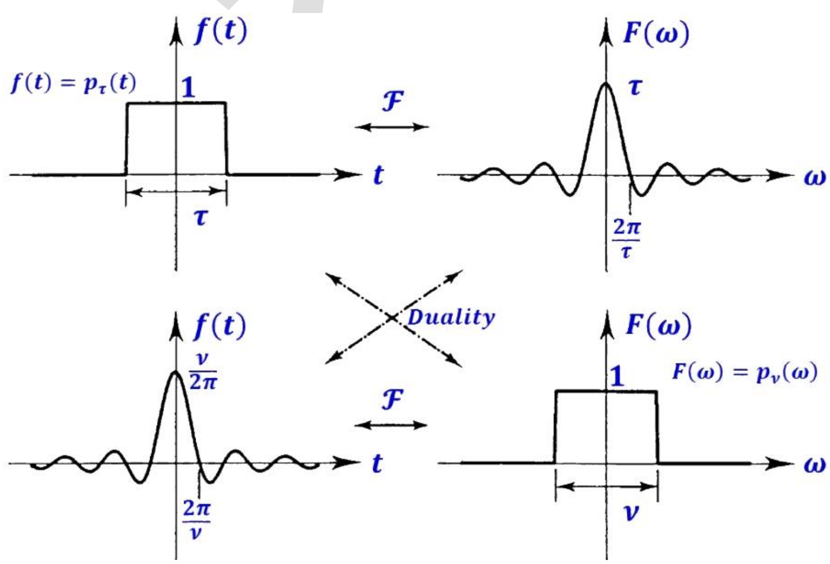
خاصیت دوگانی

شباهت رابطه $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$ با $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$ منجر به خاصیت دوگانی می‌شود.

$$x(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}X(j\omega)\Longrightarrow X(jt)\overset{F}{\longleftrightarrow}2\pi x(-j\omega)$$

مثال:

$$x(t)=\begin{cases}1 & |t|\le T_1\\ 0 & |t|>T_1\end{cases}\overset{F}{\longleftrightarrow}2T_1\operatorname{sinc}(\omega T_1)\Longrightarrow x(t)=\frac{\sin Wt}{\pi t}\overset{F}{\longleftrightarrow}\begin{cases}1 & |\omega|\le W\\ 0 & |\omega|>W\end{cases}$$



در حالت کلی:

اگر $g(\omega)\overset{FT}{\longleftrightarrow}f(t)$ می‌توان نتیجه گرفت: $2\pi f(-\omega)\overset{FT}{\longleftrightarrow}g(t)$

مثال: می‌دانیم:

$$e^{-a|t|} \xleftrightarrow{FT} \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$

با استفاده از خاصیت دوگانی نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{tikzcd}
g(t) = \dfrac{2}{1+t^2} \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dr] & x(t) = e^{-|t|} \arrow[dl] \\
G(j\omega) = 2\pi e^{-|\omega|} & X(j\omega) = \dfrac{2}{1+\omega^2} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

مشتق در حوزه‌ی فرکانس

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \Longrightarrow -jtx(t) \xleftrightarrow{F} \frac{dX(j\omega)}{d\omega}, \quad -\frac{1}{jt}x(t) + \pi x(0)\delta(t) \xleftrightarrow{F} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\eta)d\eta$$

$$x(t) = t^n \xleftrightarrow{F} 2j^n \pi \delta^{(n)}(\omega)$$

مثال: کانولوشن $x(t) = te^{-2t}u(t)$ و $h(t) = e^{-4t}u(t)$ را به دست آورید

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{j\omega + a} \quad , \quad te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{(j\omega + a)^2}$$

$$\Longrightarrow Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 2)^2} \times \frac{1}{j\omega + 4}$$

توسعه کسر جزئی:

$$Y(j\omega) = \frac{A}{j\omega + 2} + \frac{B}{(j\omega + 2)^2} + \frac{C}{j\omega + 4} \Longrightarrow y(t) = -\frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-4t}$$

رابطه پارسوال:

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

این رابطه می‌گوید که انرژی چگونه در فرکانس‌های مختلف پخش می‌شود.

به عبارتی رابطه زیر چگالی انرژی است

$$\frac{1}{2\pi}|X(\omega)|^2 \rightarrow \text{طیف چگالی انرژی}$$

سیستم‌های LTI توصیف شده با معادلات دیفرانسیل

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^{(k)}y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^{(k)}x(t)}{dt^k} \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

مثال: پاسخ ورودی $x(t) = e^{-t}u(t)$ را به سیستم با رابطه ذیل به دست آورید:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

$$\Rightarrow (j\omega)^2 Y(j\omega) + 4(j\omega)Y(j\omega) + 3Y(j\omega) = (j\omega)X(j\omega) + 2X(j\omega)$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{(j\omega)+2}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3} = \frac{A}{j\omega+3} + \frac{B}{j\omega+1} = \frac{\frac{1}{2}}{j\omega+3} + \frac{\frac{1}{2}}{j\omega+1}$$

$$h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t) \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}te^{-t}u(t) + \frac{1}{4}e^{-t}u(t) - \frac{1}{4}e^{-3t}u(t)$$

فصل پنجم (تبدیل فوریه گسسته)

تبدیل فوریه زمان گسسته

این فصل شامل موارد زیر می‌شود:

1- تبدیل فوریه گسسته
2- خواص تبدیل فوریه گسسته
3- تبدیل فوریه سیگنال پریودیک
4- خواص تبدیل فوریه

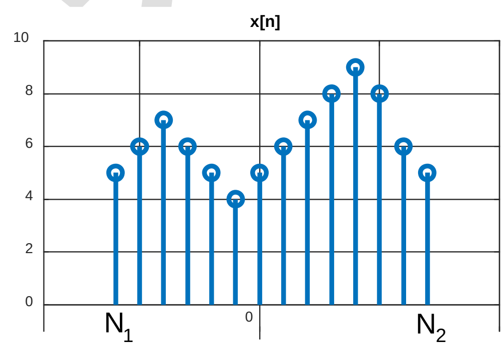
تبدیل فوریه سیگنال‌های زمان گسسته

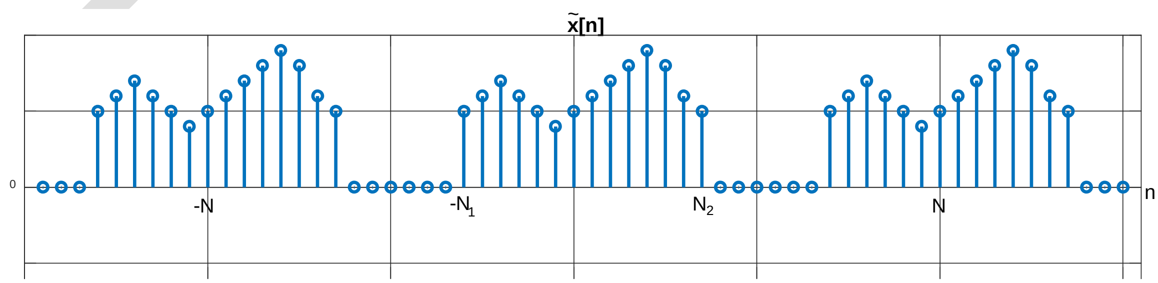
معادله سنتز

$$x[n] = \sum_{k=<n>} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=<n>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

معادله تحلیل

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{k=<n>} x[n]e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}\sum_{k=<n>} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$





با استفاده از تعریف سری فوریه داریم:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<n>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \Longrightarrow a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_2} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

تبدیل فوریه سیگنال‌های زمان گسسته به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$X(j\omega)$ متناوب با دوره تناوب 2π است. در نتیجه خواهیم داشت:

$$a_k = \frac{1}{N}X(e^{jk\omega_0})$$

رابطه سنتز:

$$\Longrightarrow \tilde{x}[n] = \sum_{k=<n>} \frac{1}{N}X(e^{jk\omega_0})e^{jk\omega_0 n} \underset{N=\frac{\omega_0}{2\pi}}{\overset{}{=}} \frac{1}{2\pi}\sum_{k=<n>} X(e^{jk\omega_0})e^{jk\omega_0 n}\omega_0$$

اگر دوره تناوب $\tilde{x}[n]$ به سمت بینهایت برود:

$$N \to \infty \Longrightarrow \tilde{x}[n] = x[n], \omega_0 \to 0, \sum \omega_0 \to \int d\omega$$

در نتیجه روابط اصلی تبدیل فوریه گسسته (DTFT) به این صورت خواهد بود (معادلات تحلیل و سنتز):

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(j\omega)e^{j\omega n}\,d\omega \ (\text{سنتز}) \quad , \quad X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \ (\text{تحلیل})}$$

شرایط همگرایی همانند همگرایی تبدیل فوریه پیوسته است:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]^2 < \infty$$

تبدیل فوریه و سری فوریه

در یک نگاه

DTFS — **a_k is samples of $X(e^{j\omega})$** — **DTFT**

$$x[n]=\sum_{k=<N>}\boxed{a_k}e^{jk\omega_0 n} \qquad x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\boxed{X(e^{j\omega})}e^{j\omega n}d\omega$$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}\boxed{x[n]}e^{-jk\omega_0 n} \qquad X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\boxed{x[n]}e^{-j\omega n}$$

تبدیل فوریه و سری فوریه (پیوسته)

در یک نگاه

CTFT — **DTFT**

x[n] has a finite interval of integration

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}}X(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega \qquad x[n]=\frac{1}{2\pi}\boxed{\int_{2\pi}}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$\boxed{X(j\omega)}=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt \qquad \boxed{X(e^{j\omega})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

$X(e^{j\omega})$ **is periodic**

تعبیر تبدیل فوریه به عنوان چگالی محتوای فرکانسی:

در $\sum_{k=<n>}a_k e^{jk\omega_0 n}$ می‌گوییم از فرکانس $k\omega_0$ به اندازه a_k در سیگنال موجود است.

حال که انتگرال است، مقدار فرکانس ω موجود در سیگنال = $\frac{1}{2\pi}\times X(\omega)\times d\omega$

$$\Rightarrow X(\omega)=2\pi\times\underbrace{\frac{\text{مقدار فرکانس } \omega \text{ موجود}}{d\omega}}_{\text{چگالی مقدار فرکانس موجود}}=2\pi\times(\text{چگالی محتوای فرکانس})$$

مثال: تبدیل فوریه سیگنال‌های گسسته زیر را به دست آورید.

$$x[n]=\delta[n]\Longrightarrow X(j\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n]e^{-j\omega n}=1$$

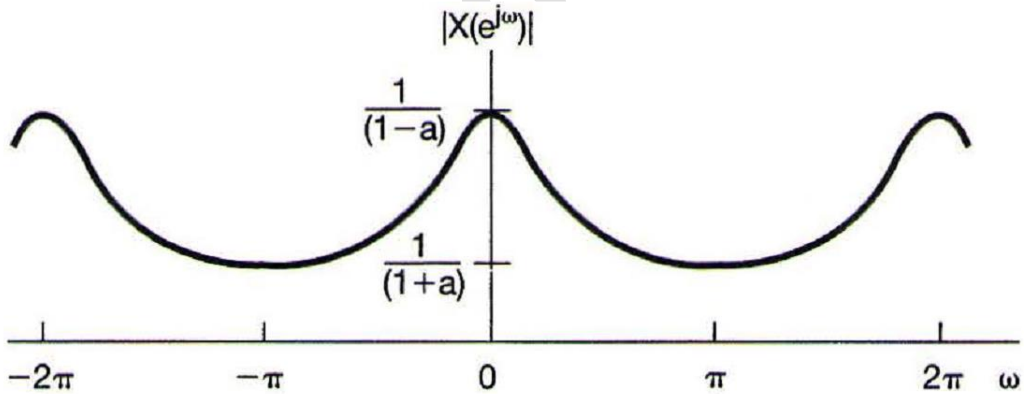
$$x[n]=\delta[n-n_0] \Longrightarrow X(j\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-n_0]e^{-j\omega n}=e^{-j\omega n_0}$$

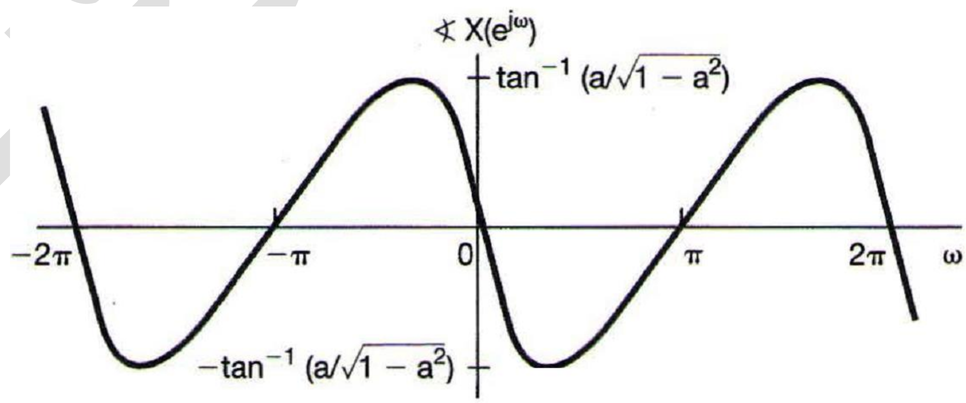
$$x[n]=a^n u[n], |a|<1 \Longrightarrow X(j\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}(ae^{-j\omega})^n=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

مجموع جملات یک تصاعد هندسی

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \text{جمله اول} \times \frac{\text{۱} - (\text{قدر نسبت})^{\text{تعداد جملات}}}{\text{۱} - (\text{قدر نسبت})}$$

$$\Longrightarrow |X(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1-2a\cos\omega+a^2}} \quad , \quad \angle X(j\omega)=-\arctan\left(\frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}\right)$$



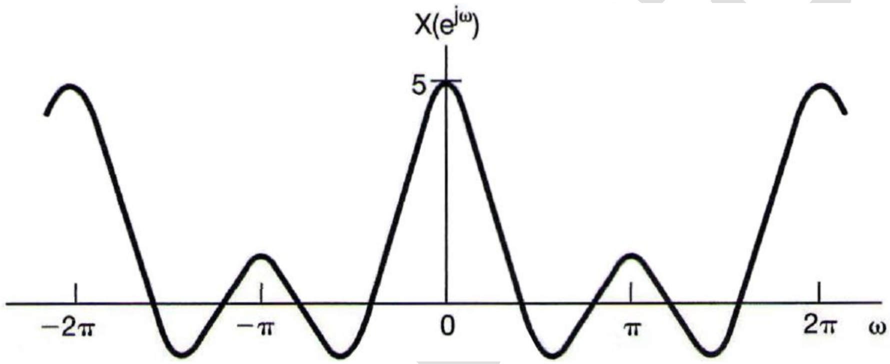


$$x[n]=a^{|n|},|a|<1 \Rightarrow X(j\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|}e^{-j\omega n}=\frac{1-a^2}{1-2a\cos\omega+a^2}$$

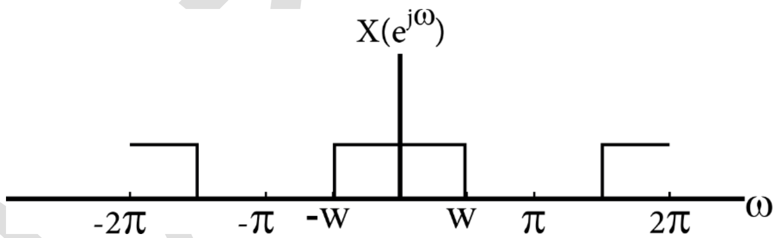
$$x[n]=u[n+N_1]-u[n-N_1-1]=\begin{cases}1 & |n|\le N_1\\ 0 & |n|>N_1\end{cases} \Rightarrow$$

$$X(j\omega)=\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n}=e^{j\omega N_1}\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-j\omega m}=\frac{e^{j\omega(N_1+1/2)}}{e^{j\omega(1/2)}}\frac{1-e^{-j\omega(2N_1+1)}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{e^{j\omega(N_1+1/2)}-e^{-j\omega(N_1+1/2)}}{e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}}=\frac{\sin\left(\omega(N_1+1/2)\right)}{\sin(\omega/2)}$$

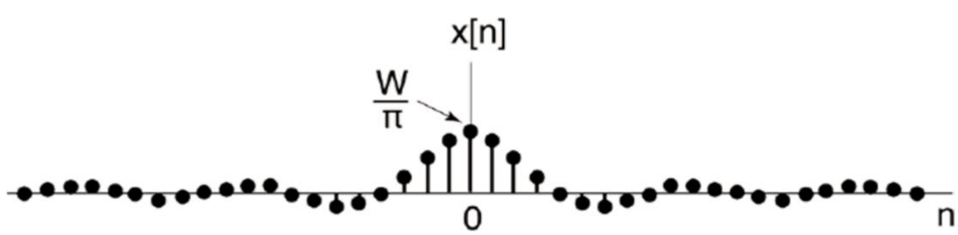


مثال: معکوس تبدیل فوریه نشان داده شده در شکل زیر را به دست آورید



$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{j\omega n}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\times\frac{e^{j\omega n}}{jn}\Big|_{-W}^{W}=\frac{\sin Wn}{\pi n}$$

$$x[0]=\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W}\underbrace{X(e^{j\omega})}_{1}\,d\omega=\frac{W}{\pi}$$



تبدیل فوریه سیگنال پریودیک

$$X(j\omega)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{2\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi m)}_{X(j\omega)}e^{j\omega n}\,d\omega=e^{j\omega_0 n}$$

$$x[n]=e^{j\omega_0 n}\xleftrightarrow{FT}X(j\omega)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)$$

مثال‌ها:

$$x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k e^{jk\omega_0 n}\Longrightarrow a_k=\frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle}x[n]e^{-jk\omega_0 n},$$

$$X(j\omega)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$$

$$\cos[\omega_0 n]\xleftrightarrow{FT}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\omega+\omega_0-2\pi l)+\sum_{l=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)$$

$$\cos[\omega_0 n]=\frac{1}{2}e^{j\omega_0 n}+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}$$

$$\sin[\omega_0 n]\xleftrightarrow{FT}\sum_{l=-\infty}^{\infty}j\pi\delta(\omega+\omega_0-2\pi l)+\sum_{l=-\infty}^{\infty}j\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)$$

$$\sin[\omega_0 n]=\frac{1}{2j}e^{j\omega_0 n}-\frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 n}$$

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN]\xleftrightarrow{FS}a_k=\frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle}x[n]e^{-j\omega_0 n}=\frac{1}{N}$$

$$\Longrightarrow x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k e^{jk\omega_0 n}=\sum_{k=\langle N\rangle}\frac{1}{N}e^{jk\omega_0 n}\Longrightarrow X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{N}\delta\left(\omega-k\underbrace{\frac{2\pi}{N}}_{k\omega_0}\right)$$

متناوب بودن DTFT

$$X\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right)=X(e^{j\omega})$$

خطی بودن DTFT

$$x[n]\xleftrightarrow{FT}X(e^{j\omega}) \text{ و } y[n]\xleftrightarrow{FT}Y(e^{j\omega}) \Longrightarrow ax[n]+by[n]\xleftrightarrow{FT}aX(e^{j\omega})+bY(e^{j\omega})$$

معکوس زمانی

$$x[-n]\xleftrightarrow{FT}X(e^{-j\omega})$$

شیفت زمانی و شیفت فرکانسی

$$x[n-n_0]\xleftrightarrow{FT}X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0} \qquad e^{jn\omega_0}x[n]\xleftrightarrow{FT}X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$$

تقارن

$$x^*[n]\xleftrightarrow{FT}X^*(e^{-j\omega})$$

$$x[n]=x^*[n]\Longrightarrow X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega})\Longrightarrow\begin{cases}Re\{X(e^{-j\omega})\}=Re\{X(e^{j\omega})\}\\ Im\{X(e^{-j\omega})\}=-Im\{X(e^{j\omega})\}\end{cases}$$

$$x[n]=x^*[n]\Longrightarrow\begin{cases}|X(e^{-j\omega})|=|X(e^{j\omega})|\\ \angle X(e^{-j\omega})=-\angle X(e^{j\omega})\end{cases}$$

زوج و فرد بودن

$x[n]$ حقیقی زوج $\Longrightarrow$ $X(e^{j\omega})$ حقیقی زوج

$x[n]$ حقیقی فرد $\Longrightarrow$ $X(e^{j\omega})$ مطلقاً موهومی فرد

$$Ev\{x[n]\}\xleftrightarrow{F}Re\{X(e^{j\omega})\} \qquad Od\{x[n]\}\xleftrightarrow{F}j\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}$$

مثال:

$$a^{|n|}=a^nu[n]+a^{-n}u[-n]-\delta[n]=2Ev\{a^nu[n]\}-\delta[n]$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\boxed{a^nu[n]\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}}$$

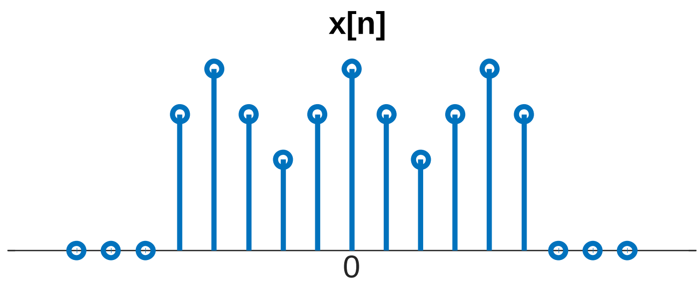
$$\Longrightarrow a^{|n|}\xleftrightarrow{FT}2Re\left\{\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right\}-1=\frac{1-a^2}{1-2a\cos\omega+a^2}$$

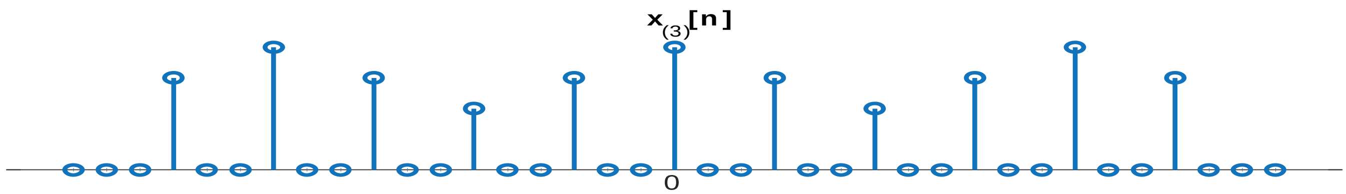
خواص تبدیل فوریه (ادامه):

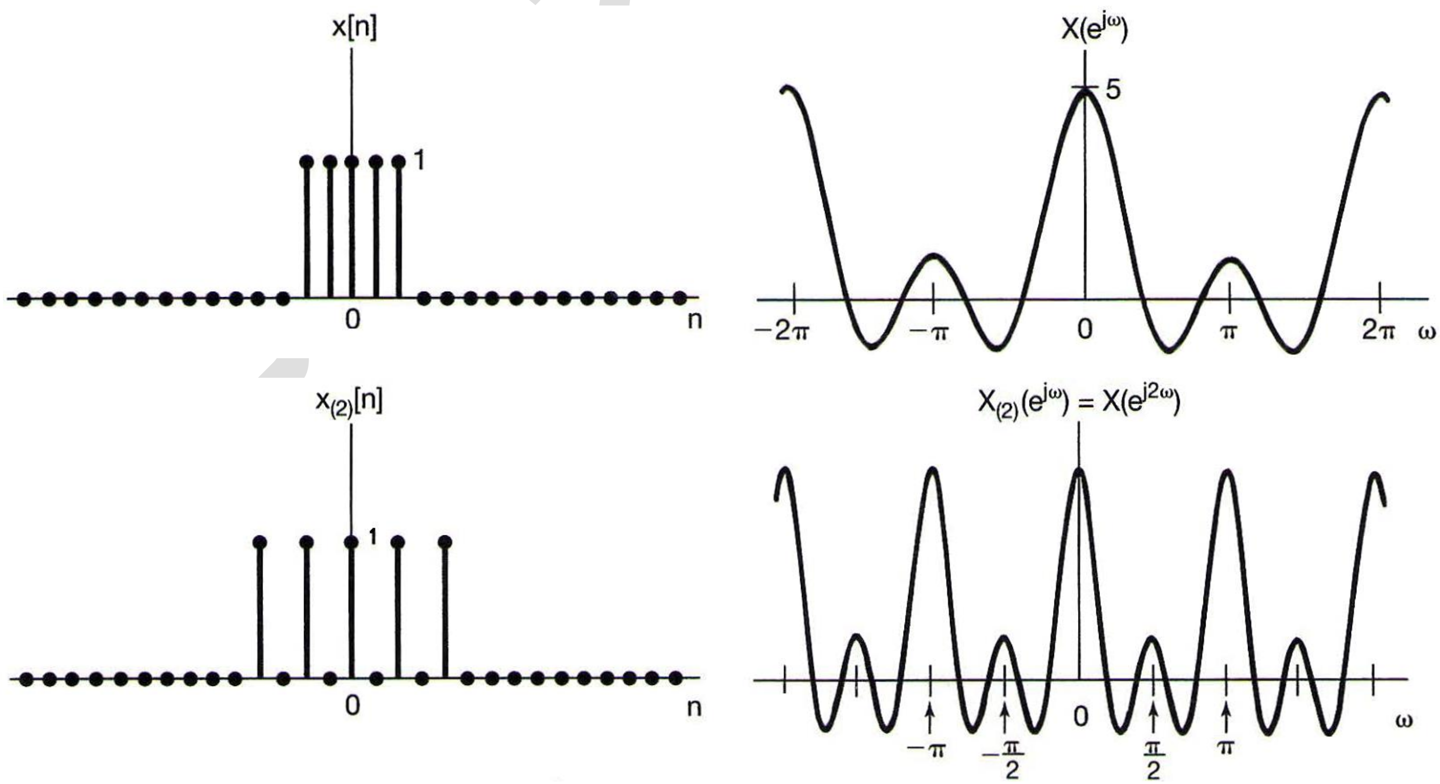
$$x_{(k)}[n]=\begin{cases} x\left[\frac{n}{k}\right] & n \ is \ a \ multiple \ of \ k \\ 0 & n \ is \ not \ a \ multiple \ of \ k \end{cases}$$

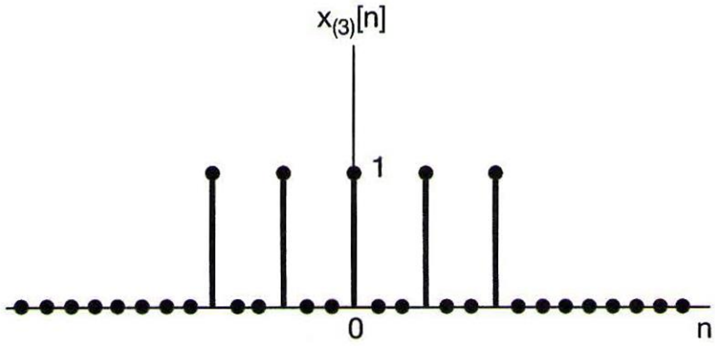
$$X_{(k)}(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[n]e^{-j\omega n} \overset{n=mk}{\widehat{=}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[mk]e^{-j\omega mk}=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j(k\omega)m}$$
$$=X(e^{jk\omega})$$

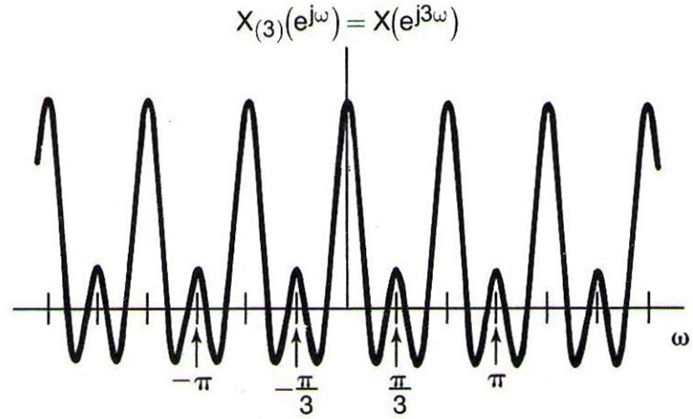
با یک ضریب k در حوزه فرکانس فشرده سازی شد.











مثال: تبدیل فوریه سیگنال $x[1-n]+x[-1-n]$ را به دست آورید

$$x[-n]\xleftrightarrow{FT}X(e^{-j\omega}),\ x[-(n-1)]\xleftrightarrow{FT}e^{-j\omega}X(e^{-j\omega}),\ x[-n-1]\xleftrightarrow{FT}e^{j\omega}X(e^{-j\omega})$$

$$y[n]\xleftrightarrow{FT}2\cos\omega\, X(e^{-j\omega})$$

خواص تبدیل فوریه (ادامه):

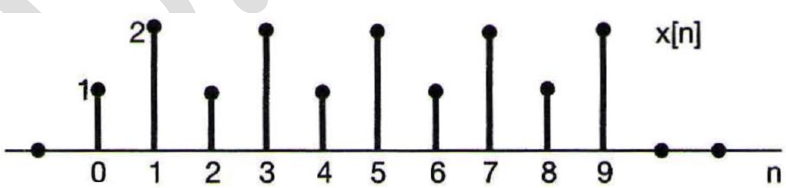
تفاضل: $x[n]-x[n-1]\xleftrightarrow{FT}(1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$

مجموع: $\sum_{m=-\infty}^{n}x[m]\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{1-e^{-j\omega}}X(e^{j\omega})+\pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$

مثال:

$$u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

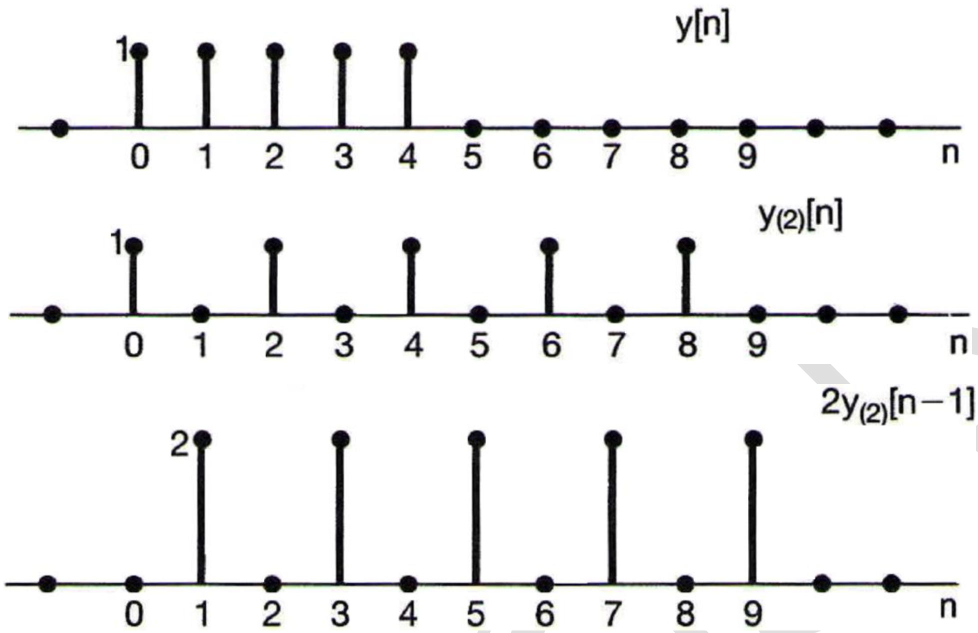
مثال: تبدیل فوریه $x[n]$ نشان داده شده در شکل زیر را به دست آورید.



برای مشاهده فایده استفاده از خاصیت گسترش زمانی، $x[n]$ را به صورت $x[n]=y_2[n]+2y_2[n-1]$ می‌نویسیم که در آن:

$$y_2[n]=\begin{cases}y\left[\frac{n}{2}\right], & if\ n\ is\ even\\ 0, & if\ n\ is\ odd\end{cases}$$

است و $y[n]$ و $y_2[n]$ به صورت شکل زیر هستند:



$$y[n] = u[n] - u[n-5] \Longrightarrow Y(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega}\frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

$$\Longrightarrow Y_2(e^{j\omega}) = Y(e^{j2\omega}) = e^{-j4\omega}\frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)} \Longrightarrow X(e^{j\omega}) = e^{-j4\omega}(1+2e^{-j\omega})\frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)}$$

$$\Longrightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{\sin\left(\omega(N_1+1/2)\right)}{\sin(\omega/2)}$$

خواص سری فوریه زمان گسسته:

مشتق در حوزه فرکانس:

$$nx[n] \overset{T}{\longleftrightarrow} j\frac{X(e^{j\omega})}{d\omega}$$

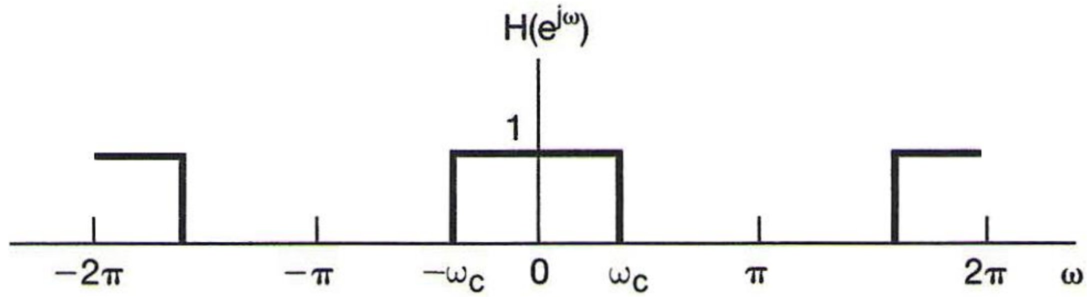
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \Longrightarrow \frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega}) = j\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]e^{-j\omega n}$$

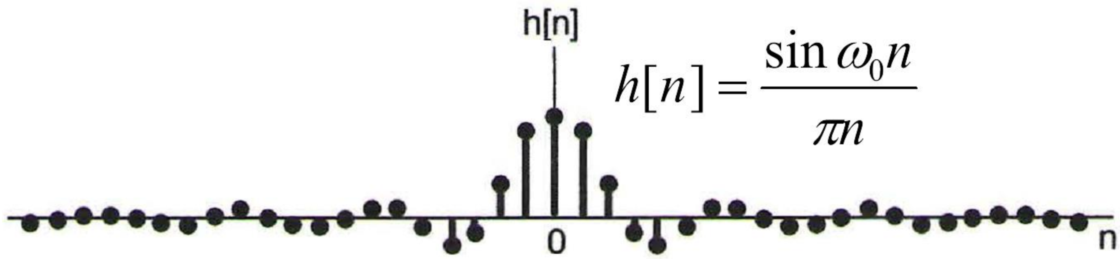
رابطه پارسوال:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$$

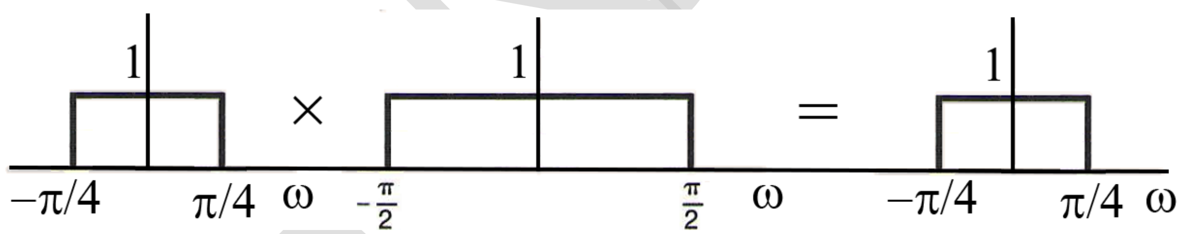
کانولوشن:

$$x[n] * y[n] \overset{FT}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$$





نتیجه کانولوشن $\frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n} * \frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}$ را به دست آورید



$h[n]=\alpha^n u[n], x[n]=\beta^n u[n] \quad |\alpha|,|\beta|<1$

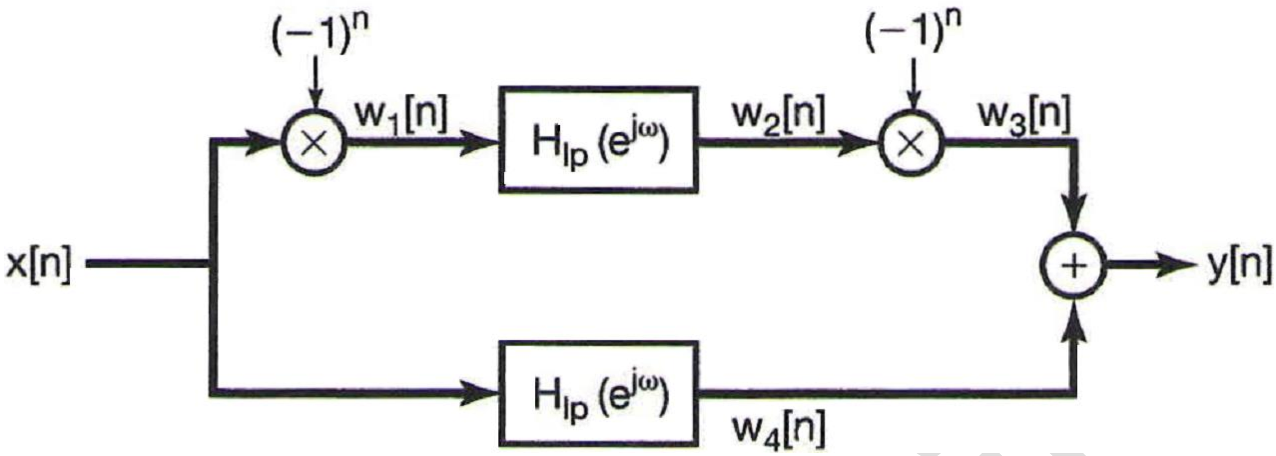
$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}, X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\beta e^{-j\omega}}$$

$$if\ \alpha\neq\beta \Longrightarrow Y(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\frac{1}{1-\beta e^{-j\omega}}$$

$$\Longrightarrow Y(e^{j\omega})=\frac{A}{1-\alpha e^{-j\omega}}+\frac{B}{1-\beta e^{-j\omega}} \Longrightarrow y[n]=A\alpha^n u[n]+B\beta^n u[n]$$

$$if\ \alpha=\beta \Longrightarrow Y(e^{j\omega})=\frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2} \Longrightarrow y[n]=(n+1)\alpha^n u[n]$$

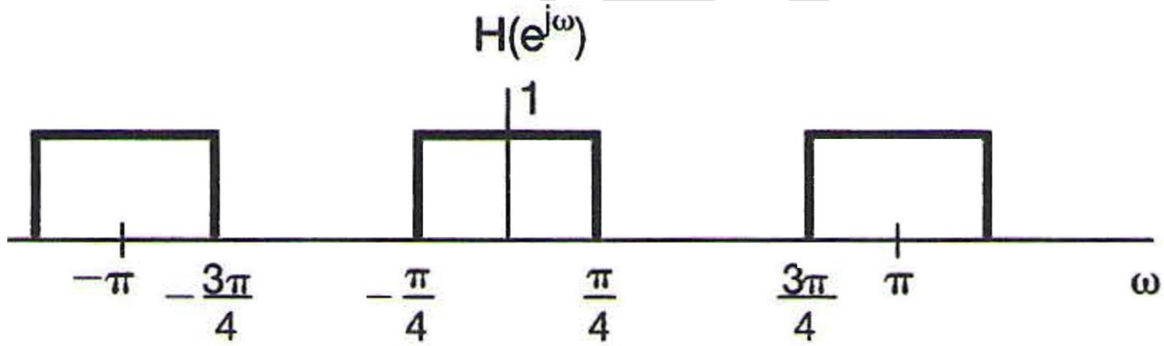
مثال: نمونه‌ای از یک فیلتر میان نگذر در شکل زیر نشان داده شده است. پاسخ فرکانسی آن را به دست می‌آوریم



$$W_1(e^{j\omega}) = X\left(e^{j(\omega-\pi)}\right), W_2(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega})X\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)$$

$$W_3(e^{j\omega}) = W_2\left(e^{j(\omega-\pi)}\right) = H_{lp}\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)X(e^{j\omega}) \Longrightarrow W_4(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

خروجی این سیستم، جمع یک فیلتر بالاگذر و یک فیلتر پایین گذر است و عملکرد BandStop را دارد:



معادلات تفاضلی:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega} Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega} X(j\omega) \Longrightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}}$$

مثال: اگر $y[n] - ay[n-1] = x[n]$ باشد، $h[n]$ را به دست آورید:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \Longrightarrow h[n] = a^n u[n]$$

مثال: اگر $y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n]$ باشد، $h[n]$ را به دست آورید:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-j2\omega}} = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}$$

$$= \frac{A_1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{A_2}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$A_1 = H(e^{j\omega})\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)\Bigg|_{e^{j\omega}=\frac{1}{4}} = -2, \quad A_2 = H(e^{j\omega})\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\Bigg|_{e^{j\omega}=\frac{1}{2}} = 4$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{4}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{2}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} \Longrightarrow h[n] = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

ورودی $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ را به این سیستم اعمال می‌کنیم.

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} \Longrightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}$$

$$A_{11} = (-e^{-j\omega})^1 \frac{d}{de^{-j\omega}}\left\{Y(e^{j\omega})\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2\right\}\Bigg|_{e^{-j\omega}=4}$$

$$= (-e^{-j\omega})\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2}\Bigg|_{e^{-j\omega}=4} = -4$$

$$A_{12} = Y(e^{j\omega})\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2\Bigg|_{e^{j\omega}=\frac{1}{4}} = -2, A_2 = Y(e^{j\omega})\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2\Bigg|_{e^{j\omega}=\frac{1}{4}} = 8$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{4}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} - \frac{2}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2} + \frac{8}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$y[n] = \left\{-4\left(\frac{1}{4}\right)^n - 2(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n + 8\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}u[n] = \left\{-2(n+3)\left(\frac{1}{4}\right)^n + 8\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}u[n]$$

خواص تبدیل فوریه

ضرب: $y[n] = x_1[n]x_2[n]$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

این فرمول، کانولوشن پریودیک سیگنال‌های $X_1(e^{j\omega})$ و $X_2(e^{j\omega})$ است.

این مثال عملکرد کانولوشن پریودیک را نشان می‌دهد:

فرض کنید:

$$x_1[n] = \frac{\sin(3\pi n/4)}{\pi n}, x_2[n] = \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}, x[n] = x_1[n]x_2[n]$$

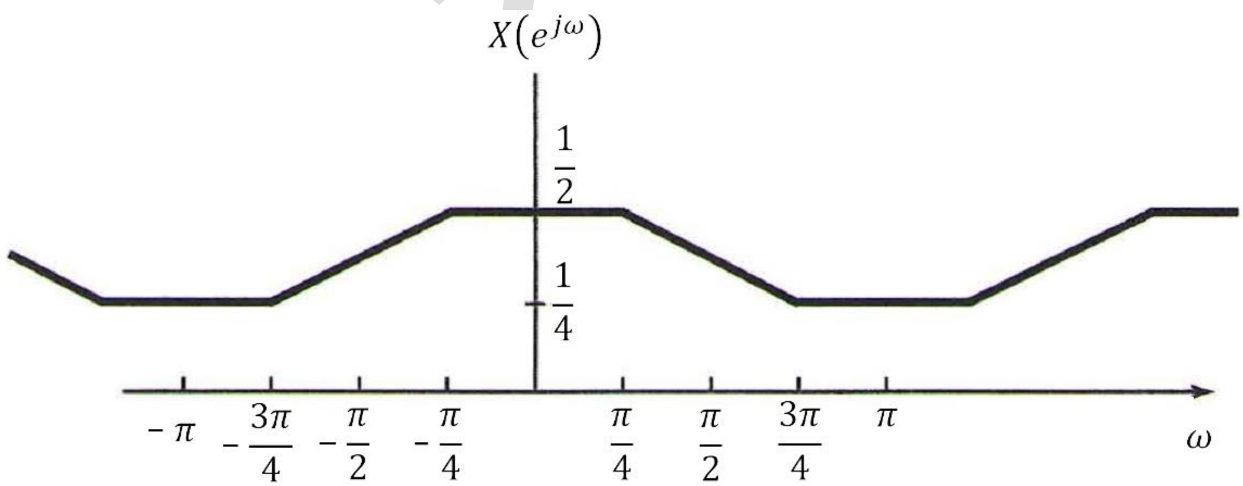
$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

این معادله شبیه کانولوشن پریودیک است. با این تفاوت که محدوده آن $-\pi < \theta \leq \pi$ است. می‌توان به شکل زیر آن را به یک کانولوشن معمولی تبدیل کرد:

$$\hat{X}_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} X_1(e^{j\omega}) & -\pi < \omega \leq \pi \\ 0 & otherwise \end{cases} \Rightarrow$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{X}_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

در نتیجه $X(e^{j\omega})$، $\frac{1}{2\pi}$ برابر کانولوشن نامتناوب پالس مستطیلی $\hat{X}_1(e^{j\omega})$ و موج مربعی متناوب $X_2(e^{j\omega})$ است.



فصل هفتم (نمونه‌برداری)

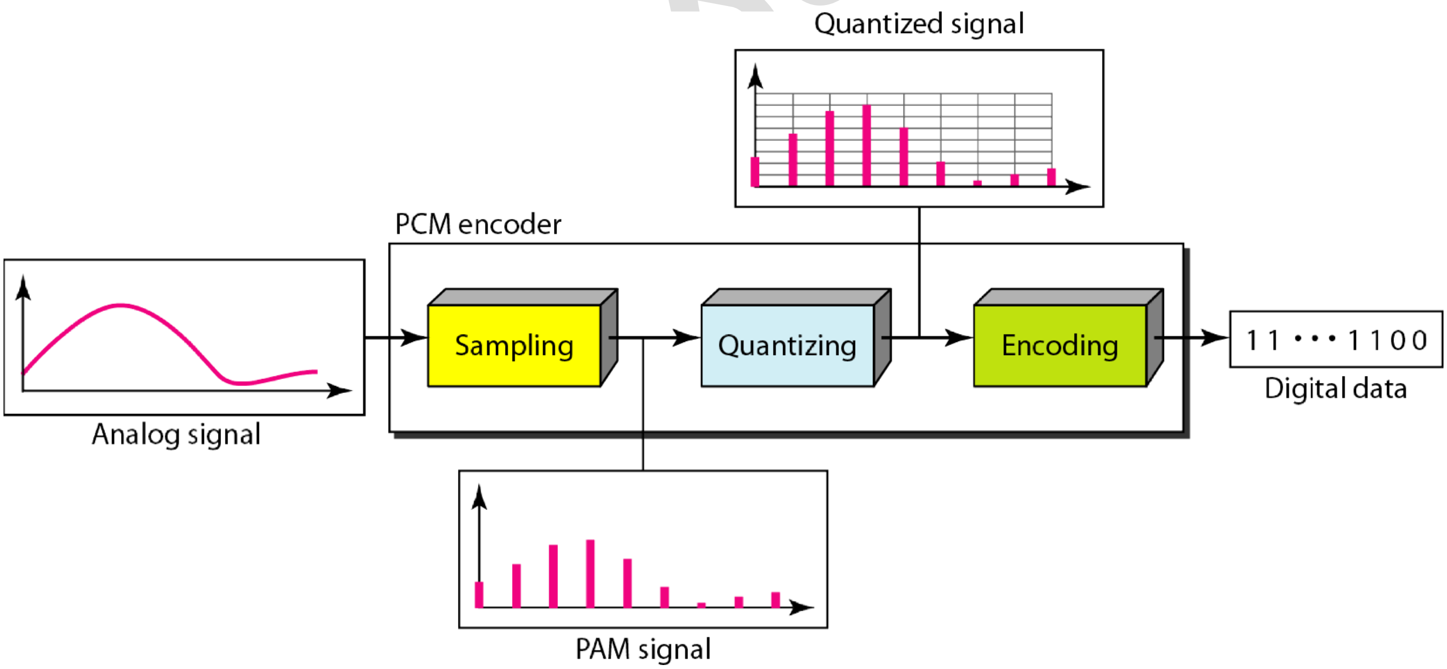
نمونه برداری

فهرست:

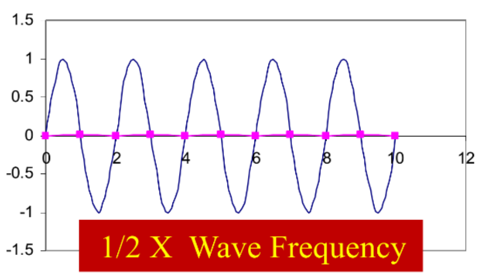
مفهوم نمونه برداری: بیشتر سیگنالهای طبیعی پیوسته هستند. برای تبدیل سیگنال‌های آنالوگ به دیجیتال به تناوب T از آنها نمونه برداری می‌شود.

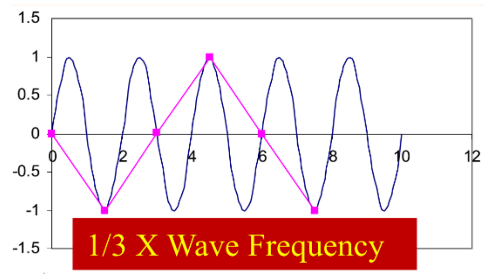
$$x[n] = x(nT), n = \cdots, -1,0,1,2, \ldots$$

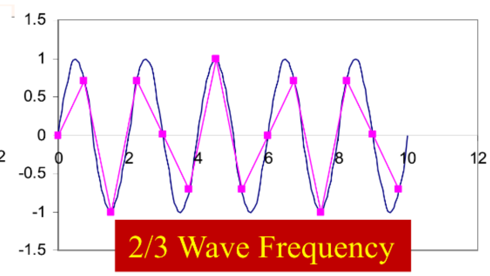
برای استفاده از مزایای پردازش دیجیتال، لازم است سیگنال زمان پیوسته (مانند صوت، تصویر، و ویدیو) را به صورت گسسته در آورد.



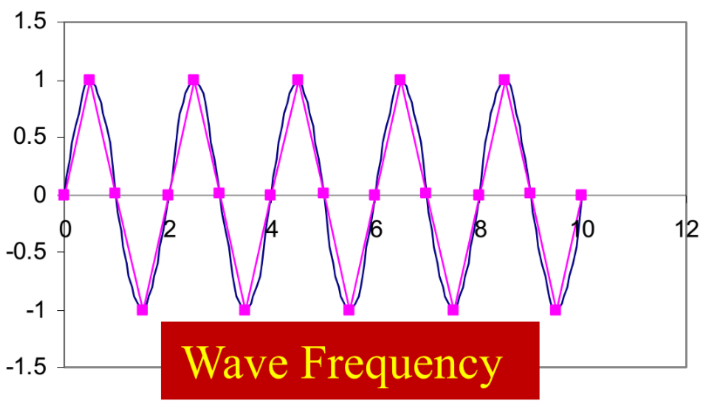
دیاگرام بالا تبدیل یک سیگنال آنالوگ به دیجیتال را نشان می‌دهد.

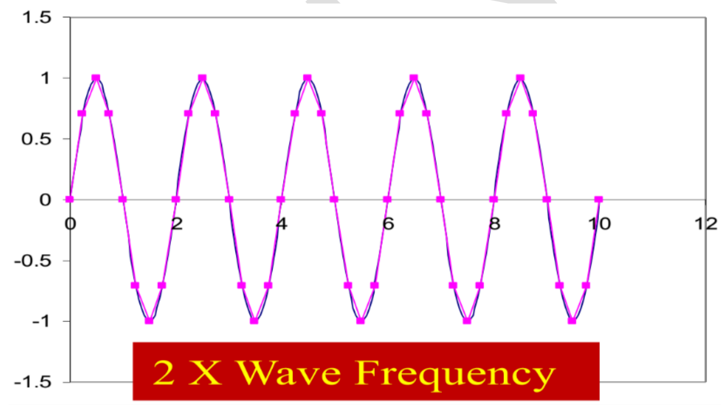






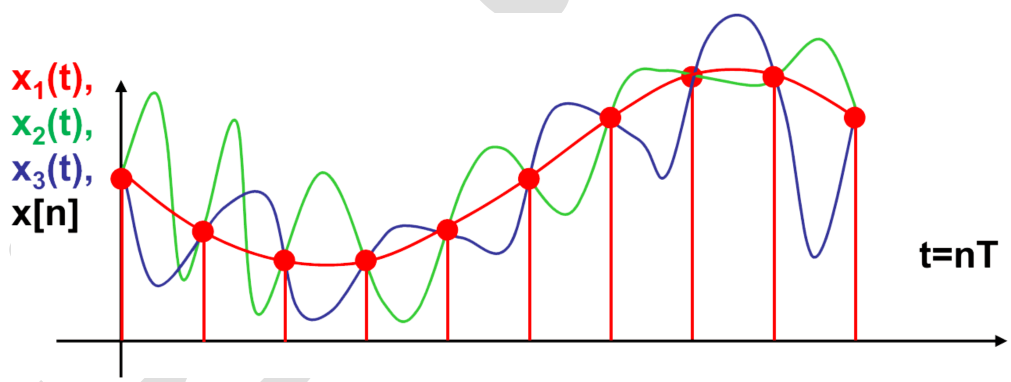
فرکانس نمونه برداری در سه حالت بالا بسیار کم است.





در این دو حالت نمونه برداری مناسبتری انجام شده است.

سیگنال‌های مختلفی می‌توان در نظر گرفت که نمونه‌های مشابهی داشته باشند:

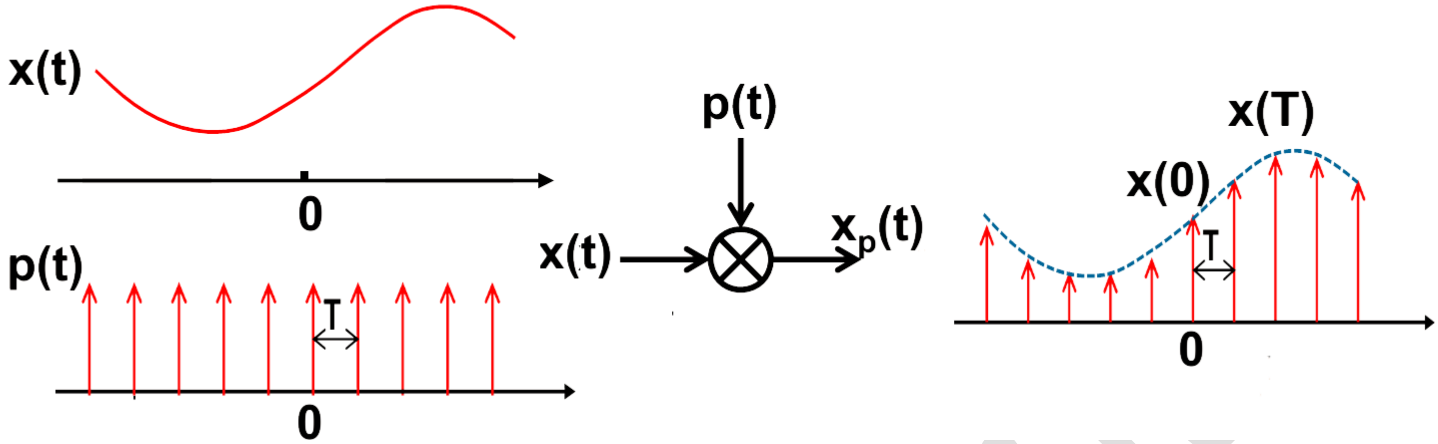


با نمونه برداری بسیاری از اطلاعات از دست می‌رود. در این حالت باید دید با چه شرایطی سیگنال اصلی از روی نمونه‌ها قابل بازسازی است.

تابع نمونه‌برداری

برای نمونه برداری از یک سیگنال باید آن را در تابع نمونه برداری ضرب کنیم.

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \Longrightarrow x_p(t) = x(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT)$$



نمونه‌برداری در حوزه فرکانس

$$x_p(t) = x(t)p(t) \Longrightarrow X_p(j\omega) = X_p(j\omega) * P(j\omega)$$

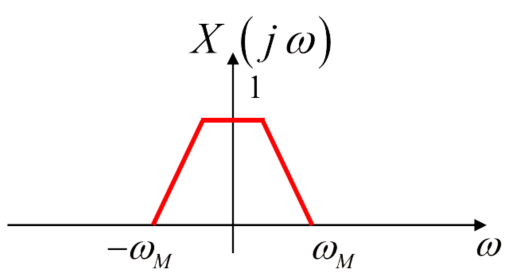
$$\Longrightarrow X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(j\theta)P\big(j(\omega-\theta)\big)d\theta$$

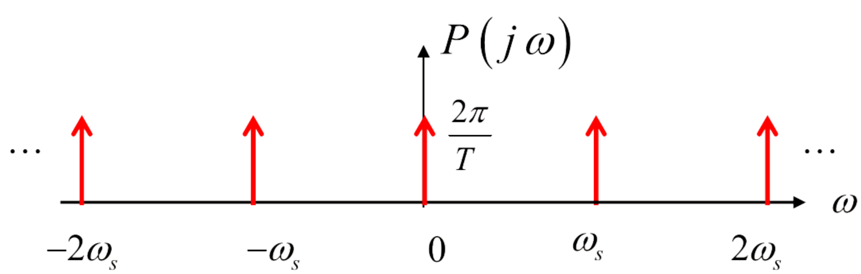
$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\omega_s) \Longrightarrow$$

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\theta)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\big((\omega-k\omega_s)-\theta\big)\,d\theta$$

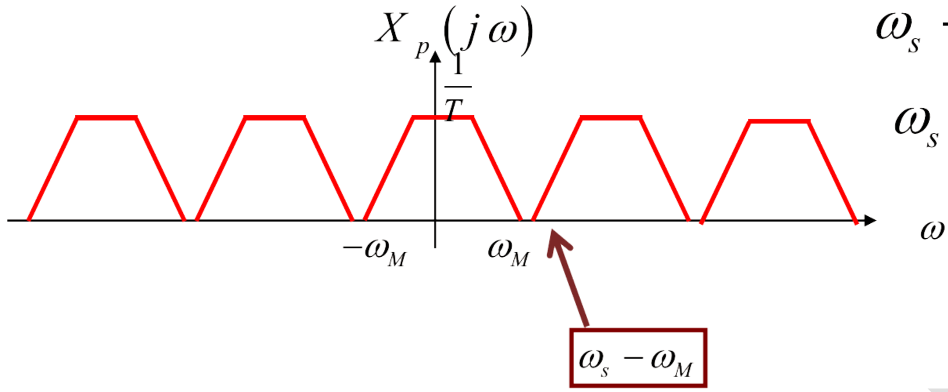
$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\theta)\delta\big((\omega-k\omega_s)-\theta\big)\,d\theta = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\big(j(\omega-k\omega_s)\big)$$

شکل این سیگنال‌ها به این صورت است:





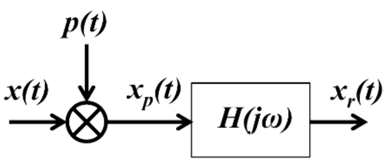
نتیجه کانولوشن ضرب دو سیگنال به صورت زیر است:



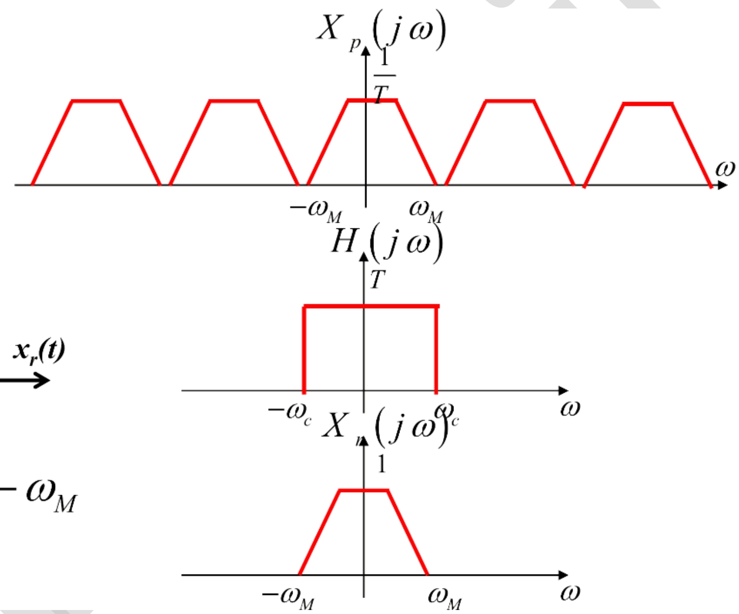
$$\omega_s - \omega_M > \omega_M$$

$$\omega_s > 2\omega_M$$

بازسازی از روی سیگنال نمونه‌برداری شده:



$$\omega_M < \omega_c < \omega_s - \omega_M$$

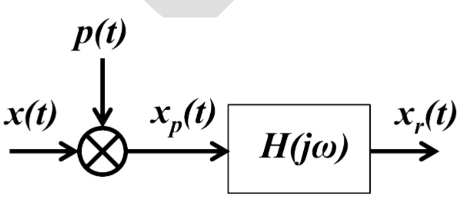


اگر بین طیف‌های شیفت یافته همپوشانی نباشد، از روی $X_p(j\omega)$ می‌توان $X_p(j\omega)$ را با استفاده از فیلتر پایین گذر بازسازی کرد.

قضیه نمونه برداری

اگر $x(t)$ یک سیگنال با پهنای محدود باشد $(X(j\omega) = 0 \ for \ \omega > \omega_M)$، می‌توان $x(t)$ را با استفاده از $x(NT)$ بازسازی کرد؛ اگر $\omega_s > 2\omega_M$ که به ω_s نرخ نایکوئیست می‌گویند.

بازسازی سیگنال در دامنه‌ی زمان

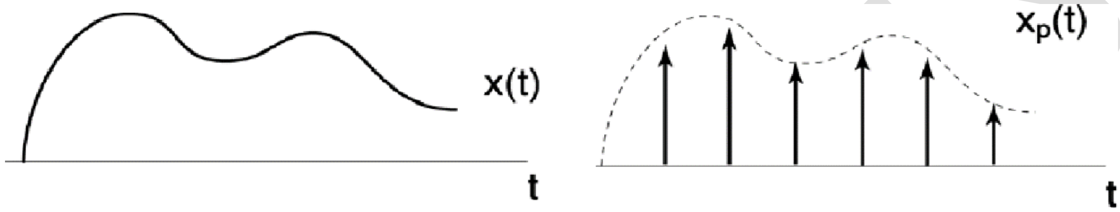


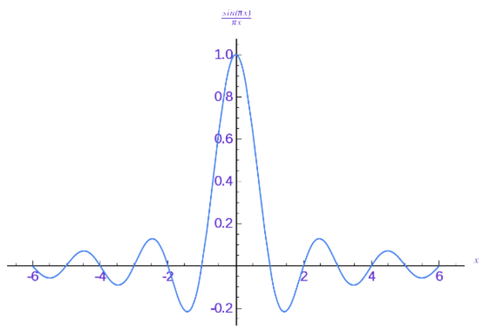
$$x_r(t) = x_p(t) * h(t), \qquad where \ h(t) = \frac{T \sin \omega_c t}{\pi t}$$

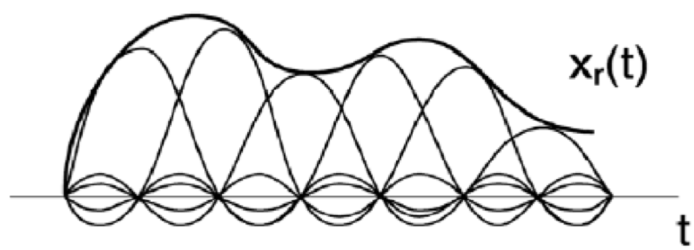
$$x_r(t) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)\right) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h(t-nT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\frac{T\sin\big(\omega_c(t-nT)\big)}{\pi(t-nT)}$$

با فرض اینکه سیگنال طیف فرکانسی محدودی دارد، فیلتر پایین گذر درون‌یابی را اعمال می‌کنیم.

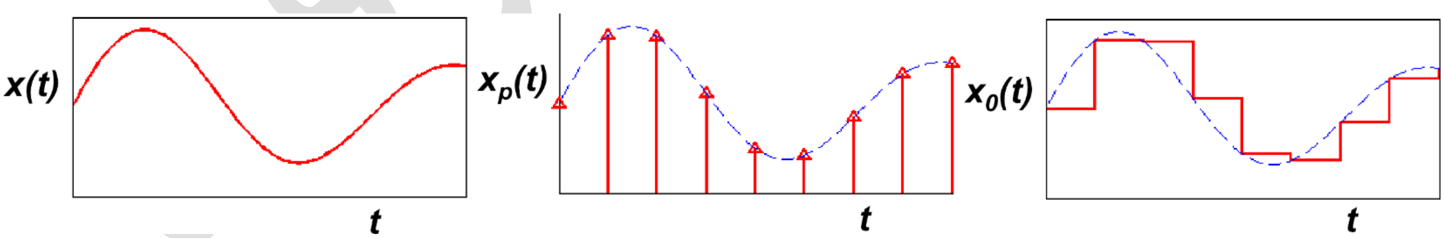


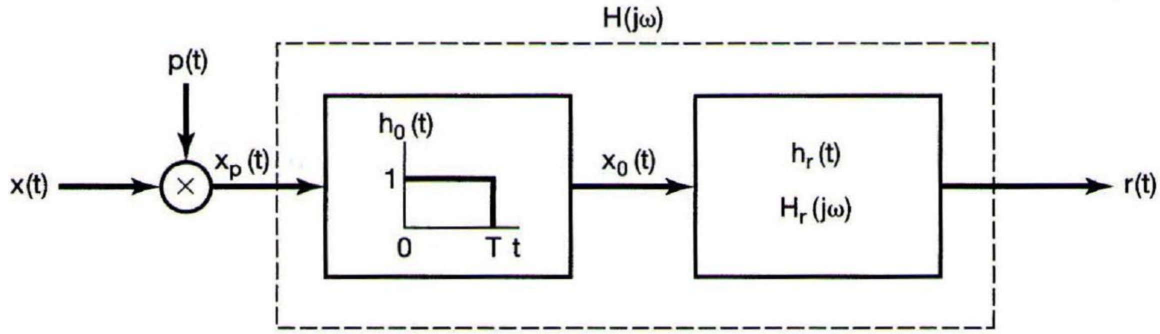




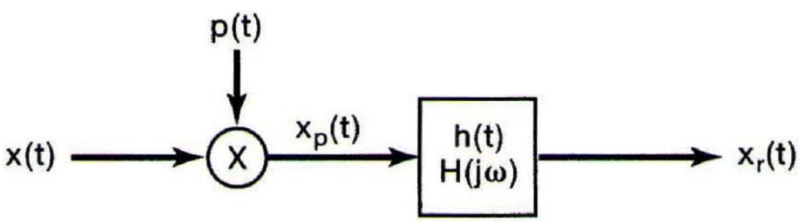
در عمل برای نمونه برداری از قطار ضربه و فیلتر ایده‌آل استفاده نمی‌شود. یک راه استفاده از سیستم zero-order hold است. این نوع سیستم مقدار سیگنال را در یک لحظه می‌گیرد و تا لحظه بعدی نگه می‌دارد. به این نوع بازسازی نگه داشتن نمونه تا نمونه بعدی درون‌یابی مرتبه صفر گفته می‌شود.

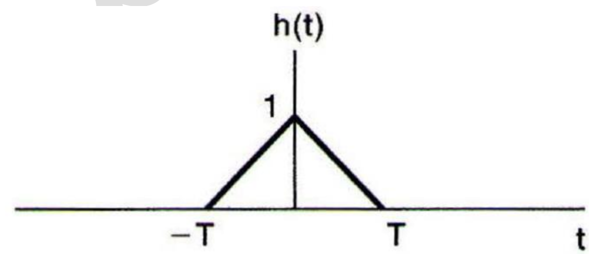
درون‌یابی: یافتن سیگنال از روی نمونه‌هایی که از آن موجود است.





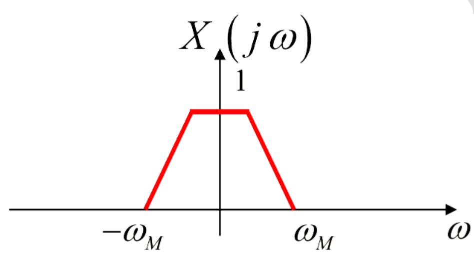
در درون‌یابی مرتبه یک نقاط نمونه برداری شده به هم متصل می‌شوند.

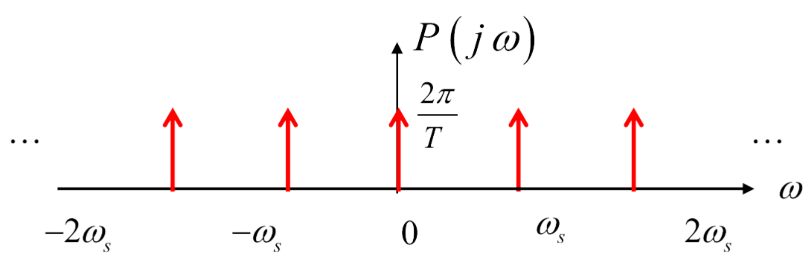


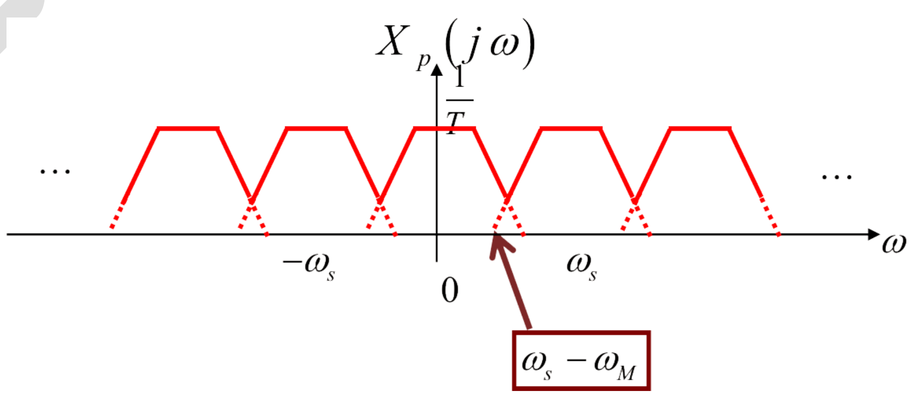


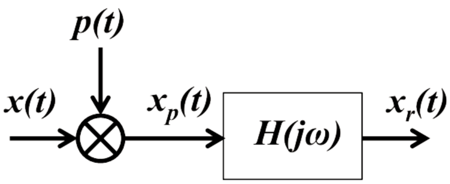
Undersampling (نمونه برداری ناکافی) و Aliasing (اعوجاج):

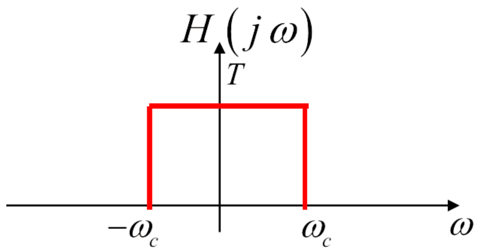
نمونه برداری کمتر از حد لازم منجر به اعوجاج می‌شود.

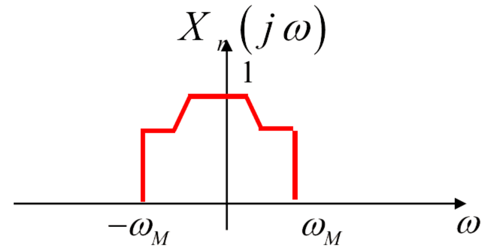




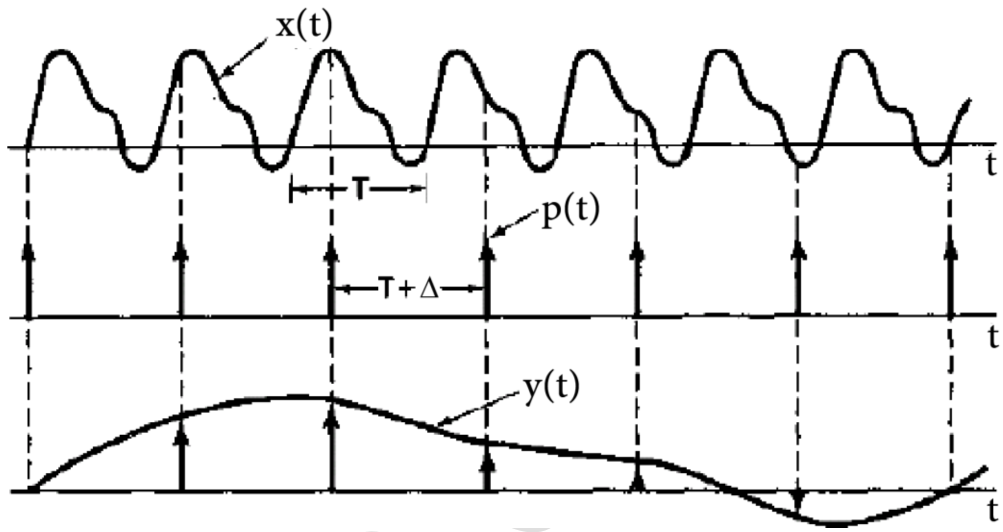




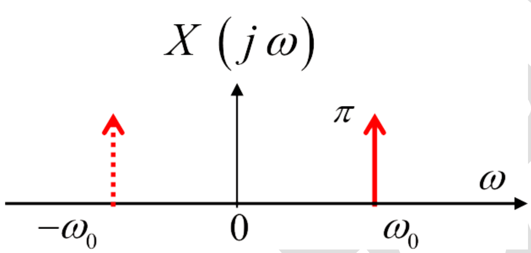




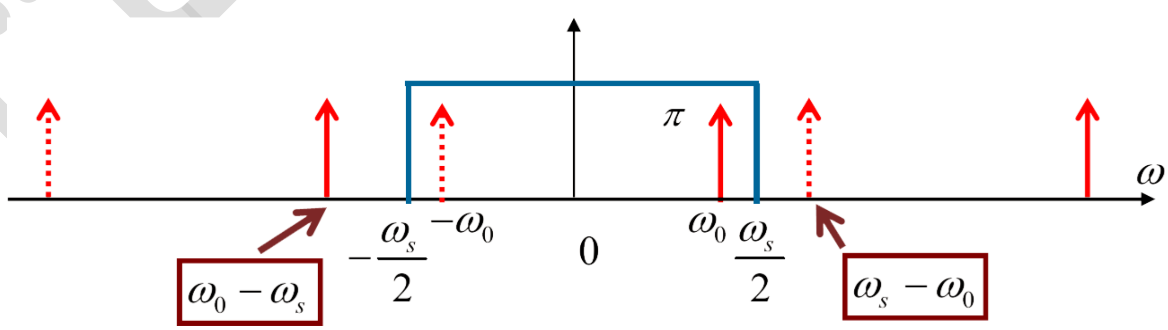
مثال: همانگونه که در شکل زیر نشان داده شده، نمونه برداری با فاصله زمانی بیش از حد (فرکانس کم) منجر به بازیابی غلط سیگنال می‌شود:

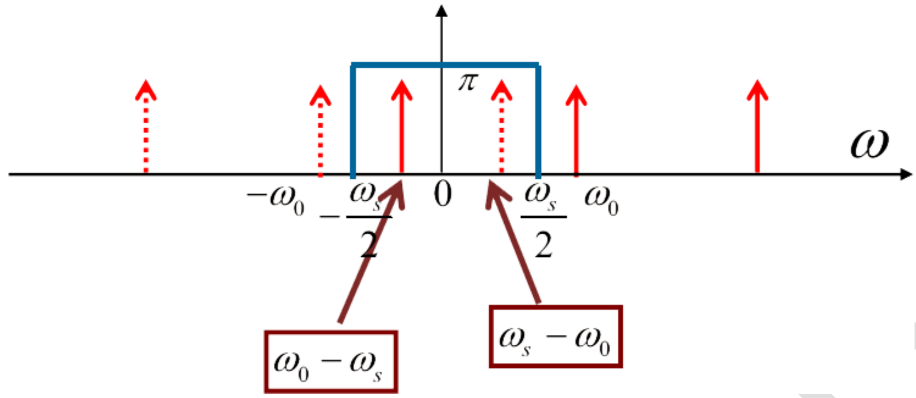


مثال: نمونه برداری و بازیابی $x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi)$:



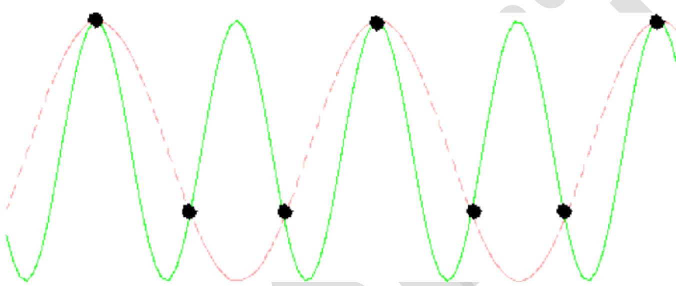
در دو نمودار زیر نمونه‌برداری مناسب و نامناسب برای این سیگنال نشان داده شده است.





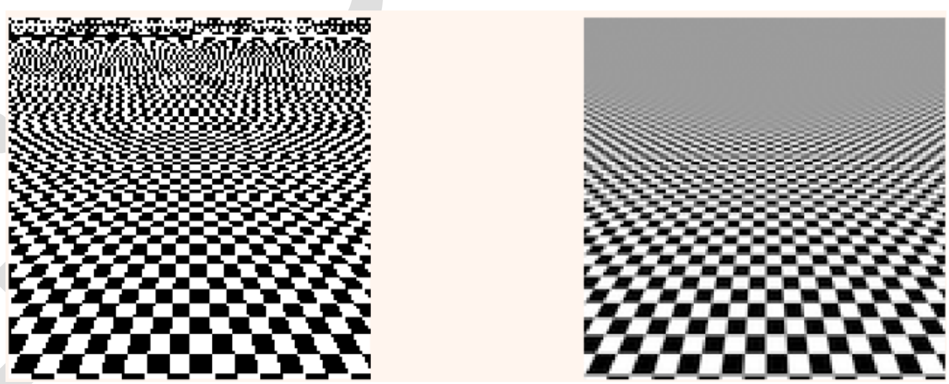
$$x(t) = \cos\big((\omega_0 - \omega_M)t + \phi\big)$$

همانگونه که در شکل زیر نشان داده شده، سیگنال به دست آمده از بازسازی با اصلی متفاوت است.



نمونه برداری در فضای دوبعدی:

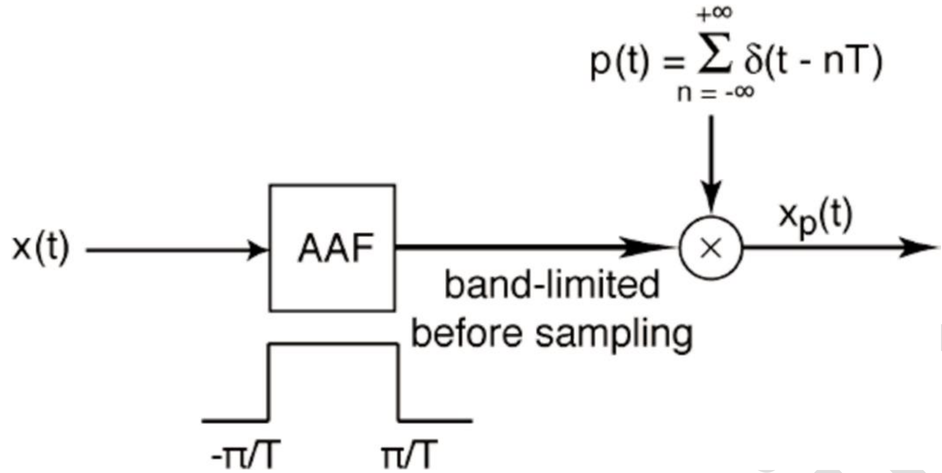
- تصویر مثالی از سیگنال دوبعدی است
- شیوه‌های متنوع‌تری برای نمونه‌برداری از سیگنال‌های دوبعدی وجود دارد.



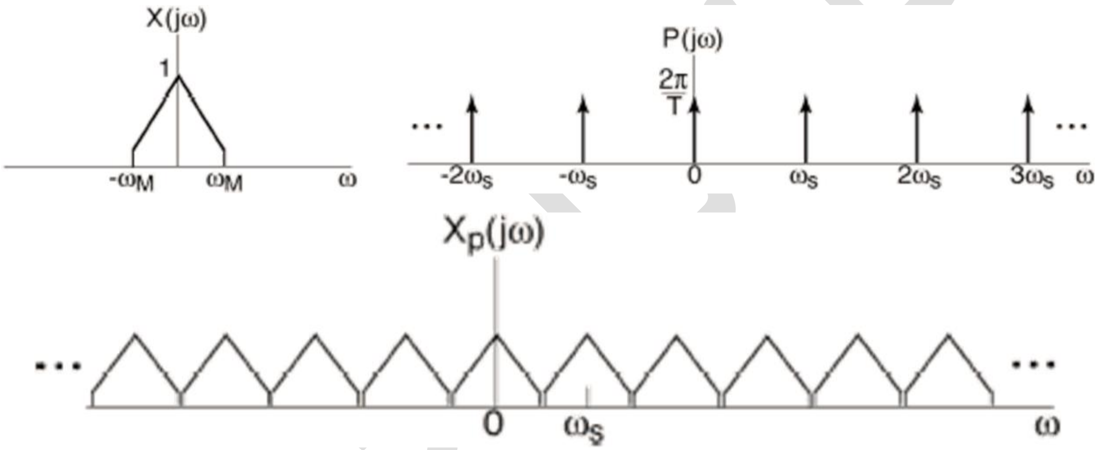
سمت راست سیگنال اصلی، سمت چپ سیگنال دچار اعوجاج دوبعدی شده.

فیلترینگ ضد اعوجاج ((Anti-Alias Filtering (AAF):

قبل از نمونه برداری از فیلتر AAF استفاده می‌شود.



اثر فیلتر AAF بر روی این سیگنال‌ها به این صورت است:



فصل نهم (تبدیل لاپلاس)

تعریف تبدیل لاپلاس:

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-st}dt$$

این تبدیل لاپلاس با تبدیل لاپلاس درس مدار متفاوت است. حد پایین آن از 0^- بود. خواص آن هم با این تبدیل فرق دارد.

در اینجا $s=\sigma+j\omega$

$$\Rightarrow X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-\sigma t}e^{-i\omega t}dt=F\{x(t)e^{-\sigma t}\}$$

وجود $e^{-\sigma t}$ باعث می‌شود که گاهی $x(t)$ علیرغم نداشتن تبدیل فوریه تبدیل لاپلاس داشته باشد.

بر خلاف تبدیل فوریه، با استفاده از تبدیل لاپلاس می‌توان آنالیز سیستم‌های ناپایدار را انجام داد. حتی با استفاده از آن می‌توانیم بگوییم سیستم چقدر لب مرز پایداری و ناپایداری است.

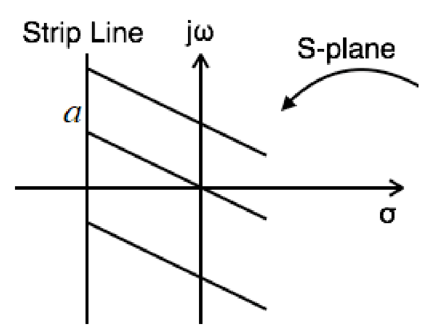
سیگنالهای کسینوسی و مربعی تبدیل لاپلاس ندارند پس در مخابرات قابل استفاده نیستند چون سیگنال کسینوسی و فیلترهای پایین گذر در مخابرات خیلی مهم هستند.

مثال: تبدیل لاپلاس عبارات زیر را بدست آورید:

$$x(t)=e^{-at}u(t)\rightarrow X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-at}u(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-(\sigma+j\omega+a)t}dt$$

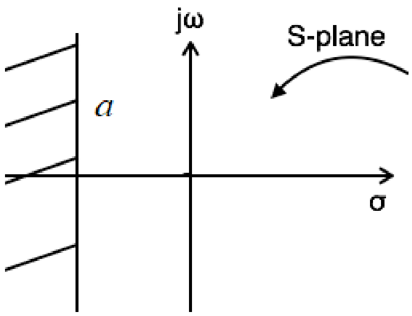
$$=-\frac{1}{\sigma+j\omega+a}\left[e^{-(\sigma+j\omega+a)t}\right]_0^{\infty}\xrightarrow{if\ a+\sigma>0}\frac{1}{s+a}$$

پس به شرطی تبدیل فوریه داریم که $Re\{s\}>-a$ باشد. به این ناحیه همگرایی (Region of convergency) گفته می‌شود.



$$x(t) = -e^{-at}u(-t) \rightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-at}u(-t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-(\sigma+j\omega+a)t}dt$$

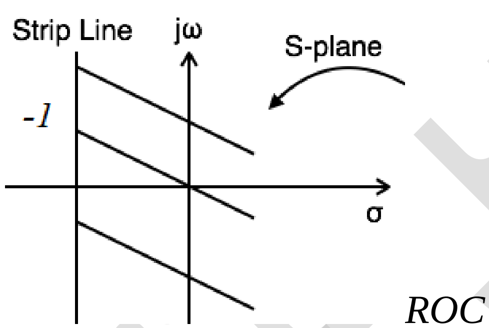
$$= \frac{1}{\sigma+j\omega+a}\left[e^{-(\sigma+j\omega+a)t}\right]_{-\infty}^{0} \xrightarrow{if\ a+\sigma<0} \frac{1}{s+1}, ROC: Re\{s\} < -a$$



پس برای تبدیل لاپلاس علاوه بر عبارت تبدیل لاپلاس ناحیه همگرایی آن هم مهم است.

$$x(t) = 3e^{-2t}u(t) + 2e^{-t}u(t) \rightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} (3e^{-2t} + 2e^{-t})u(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$$

$$= \frac{3}{\underbrace{s+2}_{Re\{s\}>-2}} + \frac{2}{\underbrace{s+1}_{Re\{s\}>-1}} = \underbrace{\frac{3}{s+2} + \frac{2}{s+1}}_{Re\{s\}>-1} = \underbrace{\frac{5s+7}{(s+2)(s+1)}}_{Re\{s\}>-1}$$

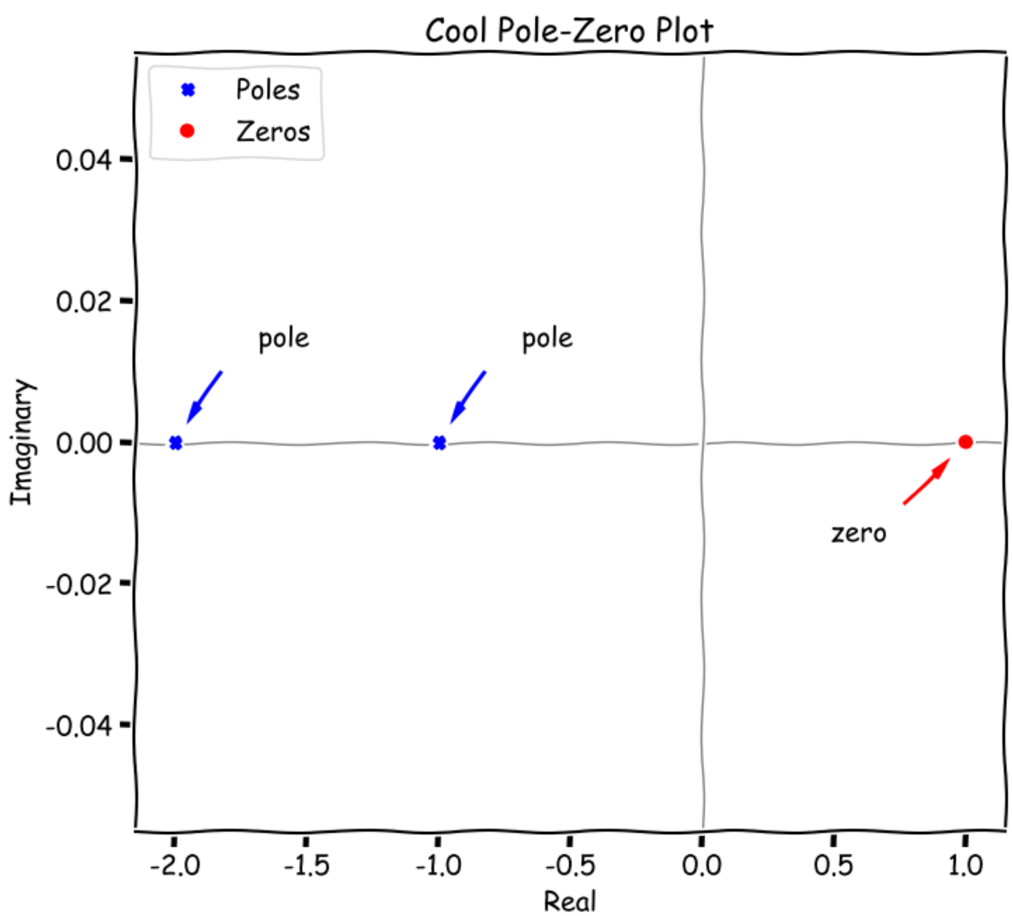


$$x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}(\cos 3t)u(t) \Rightarrow x(t)$$
$$= e^{-2t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-(1-3j)t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-(1+3j)t}u(t) \Rightarrow X(s)$$
$$= \underbrace{\frac{1}{s+2}}_{Re\{s\}>-2} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{s+1-3j}}_{Re\{s\}>-1} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{s+1+3j}}_{Re\{s\}>-1}$$
$$= \frac{2s^2+5s+12}{(s^2+2s+10)(s+2)}, ROC: Re\{s\} > -1$$

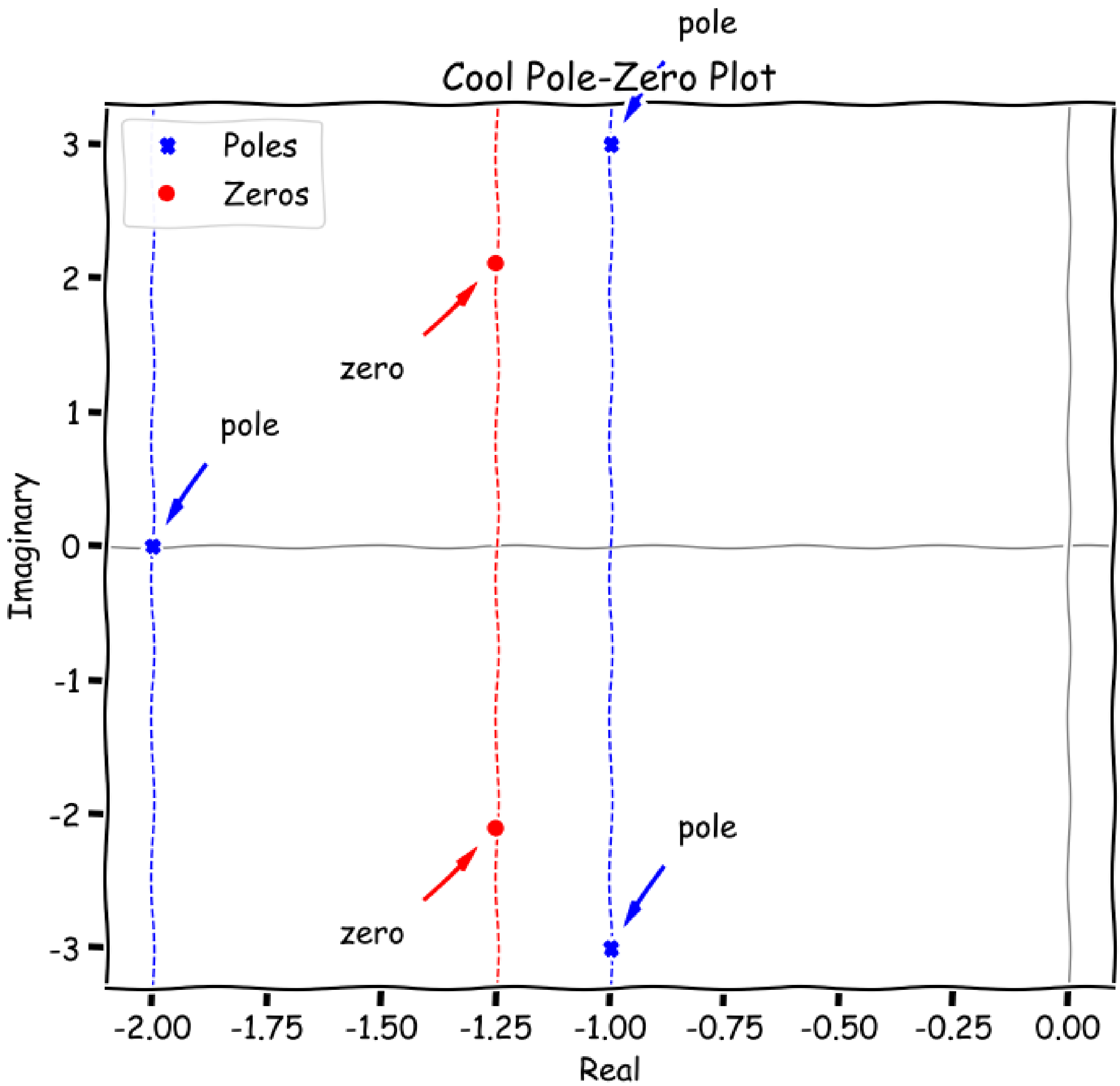
برای $X(s)$ های گویا به ریشه‌های صورت «صفر» و به ریشه‌های مخرج «قطب» می‌گوییم. و دیاگرام صفر و قطب رسم می‌کنیم.

صفرها را با o و قطبها را با x نشان می‌دهیم. مثلا در ادامه نمودار صفر و قطب را برای یک تبدیل لاپلاس نوشته‌ایم:

$$\frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$$



$$\frac{2s^2 + 5s + 12}{(s^2 + 2s + 10)(s + 2)}$$



در ROC نمی‌شود که قطب داشته باشیم.

برای نمودار بالا یک صفر هم در بینهایت داریم.

$$x(t) = \delta(t) \Rightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = 1, ROC =$$ کل صفحه

عمدتاً زمانی سیگنال تبدیل فوریه دارد که محور $j\omega$ داخل ROC قرار بگیرد. به عنوان مثال $x(t) = e^{-2t}$ تبدیل فوریه دارد ولی $x(t) = e^{2t}$ تبدیل فوریه ندارد.

در مواردی که عبارت $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt < \infty$ برقرار نیست ولی $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt < \infty$ برقرار است، با استفاده از تابع ضربه تبدیل فوریه تعریف کردیم مثل $h(t) = \sin\frac{\omega_0(t)}{\pi t}$ که تبدیل فوریه آن نا پیوسته مربعی شد. اگر شرط اول برقرار بود تبدیل فوریه هم پیوسته می‌شد. این سیگنال اصلا تبدیل فوریه ندارد.

حال تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t) = e^{j\omega_0 t}u(t)$ را محاسبه می‌کنیم.

از تابع زیر که قبلا تبدیل لاپلاس آن را بدست آوردیم استفاده می‌کنیم:

$$e^{-at}u(t) \to \frac{1}{s+a}$$

جایگذاری می‌کنیم:

$$e^{j\omega_0 t}u(t) \to \frac{1}{s-j\omega_0}, ROC: Re\{s\} > 0$$

آنچه مشخص است روی محور $j\omega$ قطب دارد و تبدیل فوریه ندارد ولی ما با روش‌هایی با استفاده از تابع ضربه تبدیل فوریه در نظر گرفته بودیم:

$$e^{j\omega_0 t}u(t) \to \frac{1}{j(\omega-\omega_0)} + \pi\delta(\omega-\omega_0)$$

در جایی که در متن کتاب برای تبدیل فوریه از $X(j\omega)$ به جای $X(\omega)$ استفاده می‌کند می‌خواهد تأکید کند که این حالت خاصی از تبدیل لاپلاس است که در اینجا صادق نیست و ما استفاده نکردیم.

خواص *ROC*:

1) ROC شامل نوارهایی موازی محور $j\omega$ است.

ثابت می‌کنیم، اگر $\sigma_0 + j\omega_0 \in ROC$ آنگاه $\forall\omega: \sigma_0 + j\omega \in ROC$ بر این اساس می‌توان چنین نتیجه گرفت:

$$X(s) = F\{x(t)e^{-\sigma_0 t}\} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|e^{-\sigma_0 t}dt < +\infty$$

2) برای $X(s)$ گویا ROC شامل هیچ قطبی نیست

3) اگر $x(t)$ دوره محدود داشته باشد و مطلقاً انتگرال پذیر باشد آنگاه ROC کل صفحه است.

مطلقاً انتگرال پذیر بودن : $\int_{T_1}^{T_2} |x(t)|dt < +\infty$

4) اگر $x(t)$ دست راستی باشد (از جایی به بعد مقدار دارد) آنگاه ROC هم دست راستی است.

5) اگر $x(t)$ دست چپی باشد (از جایی به بعد مقدار دارد) آنگاه ROC هم دست چپی است.

6) اگر سیگنال دو طرفه باشد، ROC می‌تواند یک نوار باشد (یا تهی باشد). یعنی نمی‌تواند دو تا نوار باشد. اثبات با استفاده از دو خاصیت قبلی است.

7) اگر $X(s)$ گویا باشد یا ROC توسط قطبها محدود می‌شود یا تا بینهایت گسترش می‌یابد. (با عبارتی مرز ROC باید چسبیده به یک یا چند تا از قطبها باشد.)

8) اگر $X(s)$ گویا باشد، اگر $x(t)$ دست راستی باشد، ROC سمت راست بزرگترین قطب است، اگر دست چپی باشد، ROC سمت چپ کوچکترین قطب است.

مثال: تمام سیگنال‌هایی را که تبدیل لاپلاس آنها $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ است، بدست آورید.

$$\frac{1}{s+a}, Re\{s\} > -Re\{a\} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} e^{-at}u(t)$$

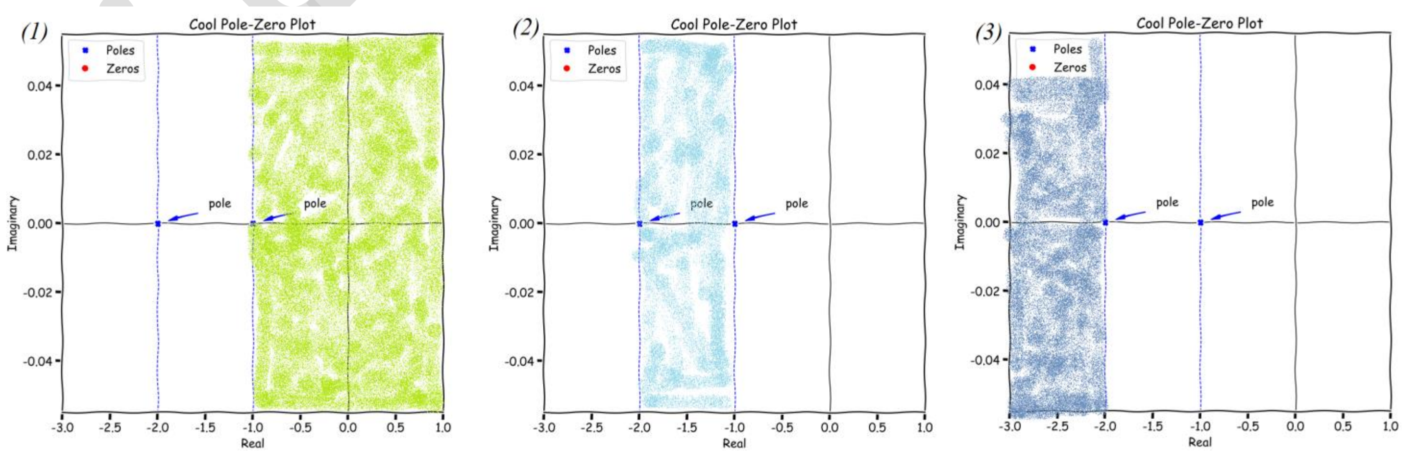
$$\frac{1}{s+a}, Re\{s\} < -Re\{a\} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} -e^{-at}u(-t)$$

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$x_1(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

$$x_2(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t)$$

$$x_3(t) = -e^{-t}u(-t) + e^{-2t}u(-t)$$



ناحیه همگرایی مربوط به هر کدام از سه سیگنال بالا در اینجا رسم شده است. که در بالا مشاهده می‌شود. فقط سیگنال اول (۱) تبدیل فوریه دارد چون فقط این ناحیه است که محور $j\omega$ را در بر دارد.

فرمول تبدیل معکوس لاپلاس

فرض می‌کنیم ROCهم داده شده است.

$$X(\sigma_0 + j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma_0 t}\} \Rightarrow x(t)e^{-\sigma_0 t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma_0 + j\omega)e^{j\omega t}dt \Rightarrow x(t)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma_0 + j\omega)e^{(j\omega+\sigma_0)t}d\omega \xrightarrow{s=\sigma_0+j\omega} x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} X(s)e^{st}ds$$

این عبارت نباید به σ_0 بستگی داشته باشد. برای بررسی ریاضی این موضوع به معلومات ریاضی مهندسی نیاز است. تبدیل لاپلاس در ناحیه ROC تحلیلی است. انتگرال یک تابع تحلیلی $F(s)$ روی یک منحنی بسته که در آن هیچ قطبی نیست به این صورت است:

$$\oint F(s)ds = 0$$

پس اگر از یک مسیر انتگرال گیری بالا رفته و پایین بیاییم نتیجه صفر است. در نتیجه σ_0 در ان انتگرال مهم نیست.

خواص تبدیل لاپلاس

TABLE 9.3 PROPERTIES OF THE UNILATERAL LAPLACE TRANSFORM

Property	Signal	Unilateral Laplace Transform
	$x(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$	$\mathcal{X}(s)$ $\mathcal{X}_1(s)$ $\mathcal{X}_2(s)$
Linearity	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$a\mathcal{X}_1(s) + b\mathcal{X}_2(s)$
Shifting in the s-domain	$e^{s_0 t}x(t)$	$\mathcal{X}(s - s_0)$
Time scaling	$x(at), \quad a > 0$	$\frac{1}{a}\mathcal{X}\left(\frac{s}{a}\right)$
Conjugation	$x*(t)$	$x*(s)$
Convolution (assuming that $x_1(t)$ and $x_2(t)$ are identically zero for $t < 0$)	$x_1(t) * x_2(t)$	$\mathcal{X}_1(s)\mathcal{X}_2(s)$
Differentiation in the time domain	$\frac{d}{dt}x(t)$	$s\mathcal{X}(s) - x(0^-)$
Differentiation in the s-domain	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}\mathcal{X}(s)$
Integration in the time domain	$\int_{0^-}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}\mathcal{X}(s)$

شیفت زمانی:

$$\mathcal{L}[x(t-t_0)] = e^{-t_0 s}X(s), \quad ROC = R_x$$

شیفت در حوزه s:

$$\mathcal{L}[e^{s_0 t}x(t)] = X(s - s_0), \quad ROC = R_x + Re[s_0]$$

مقیاس زمانی ROC بزرگتر می‌شود:

$$\mathcal{L}[x(at)] = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right), ROC = |a|R$$

:Conjugation

$$\mathcal{L}[x^*(t)] = X^*(s^*), \quad ROC = R_x$$

اثبات:

$$X^*(s^*) = [\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-s^* t}dt]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}[x^*(t)]$$

کانولوشن:

$$\mathcal{L}[x(t) * y(t)] = X(s)Y(s), \quad ROC \supseteq (R_x \cap R_y)$$

برای time scaling شکل کتاب اشتباه است و در ROC محدوده ضرب در a می‌شود نه تقسیم.

۲.۴ تبدیل زی

در بخش ۲.۸ دیدیم که برای یک سیستم زمان گسسته LTI با پاسخ ضربه‌ای $h[n]$، برای ورودی مختلط توانی z^n، خروجی سیستم برابراست با

$$y[n] = \mathbf{T}\{z^n\} = H(z)z^n \tag{۱.۴}$$

که در آن

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} \tag{۲.۴}$$

۲.۲.۴ ناحیه همگرائی:

مانند تبدیل لاپلاس، مقادیری که متغیر مختلط z تبدیل زی همگرا می‌شود به‌آن ناحیه همگرائی می‌گویند. برای روشن شدن مطلب تبدیل زی و ناحیه همگرائی مربوط به‌آن مثال زیر را در نظر گیرید.

- **تمرین ۴.۱** سیگنال زیر را در نظر گیرید

$$x[n] = a^n u[n] \quad \text{حقیقی} \quad a \tag{۸.۴}$$

طبق رابطه (۳.۴)، تبدیل زی $x[n]$ برابر است با:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

برای همگرا شدن $X(z)$ لازم است که

$$\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n < \infty$$

بنابراین، ناحیه همگرائی بازه مقادیر z است به‌صورتی که $|az^{-1}| < 1$ یا بعبارت دیگر $|z| > |a|$ بنابراین:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| > |a| \qquad (۹.۴)$$

با ضرب صورت و مخرج رابطه (۹.۴) در z می‌توان نوشت:

$$X(z)= \frac{z}{z-a} \quad |z| > |a| \qquad (۱۰.۴)$$

دو صورت $X(z)$ از رابطه (۹.۴) و (۱۰.۴) مفید بوده و بستگی به‌کاربرد دارد. از رابطه (۴.۱۰) مشاهده می‌کنیم که $X(z)$ یک کسر گویا تابع z است. در نتیجه، مانند تبدیل لاپلاس گویا، می‌توانیم آن را با صفرها (ریشه‌های صورت کسر) و قطب‌ها (ریشه‌های مخرج کسر) مشخص کنیم. از رابطه (۱۰.۴) مشاهده می‌کنیم که آن یک صفر در $z = 0$ و یک قطب در $z = a$ دارد. ناحیه همگرائی و نمودار قطب-صفرها برای این مثال در شکل (۱.۴) نشان داده شده است. در کاربردهای تبدیل زی، صفحه مختلط را عموماً صفحه زی[۴] می‌نامند.

- **تمرین ۴.۲** سیگنال زیر را در نظر گیرید.

$$x[n] = -a^n u[-n-1] \qquad (۱۱.۴)$$

تبدیل زی $X(z)$ آن در مسئله ۴.۱ داده شده است.

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| < |a| \qquad (۱۲.۴)$$

دوباره، مانند قبل، $X(z)$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$X(z) = \frac{z}{z-a} \quad |z| < |a| \qquad (۱۳.۴)$$

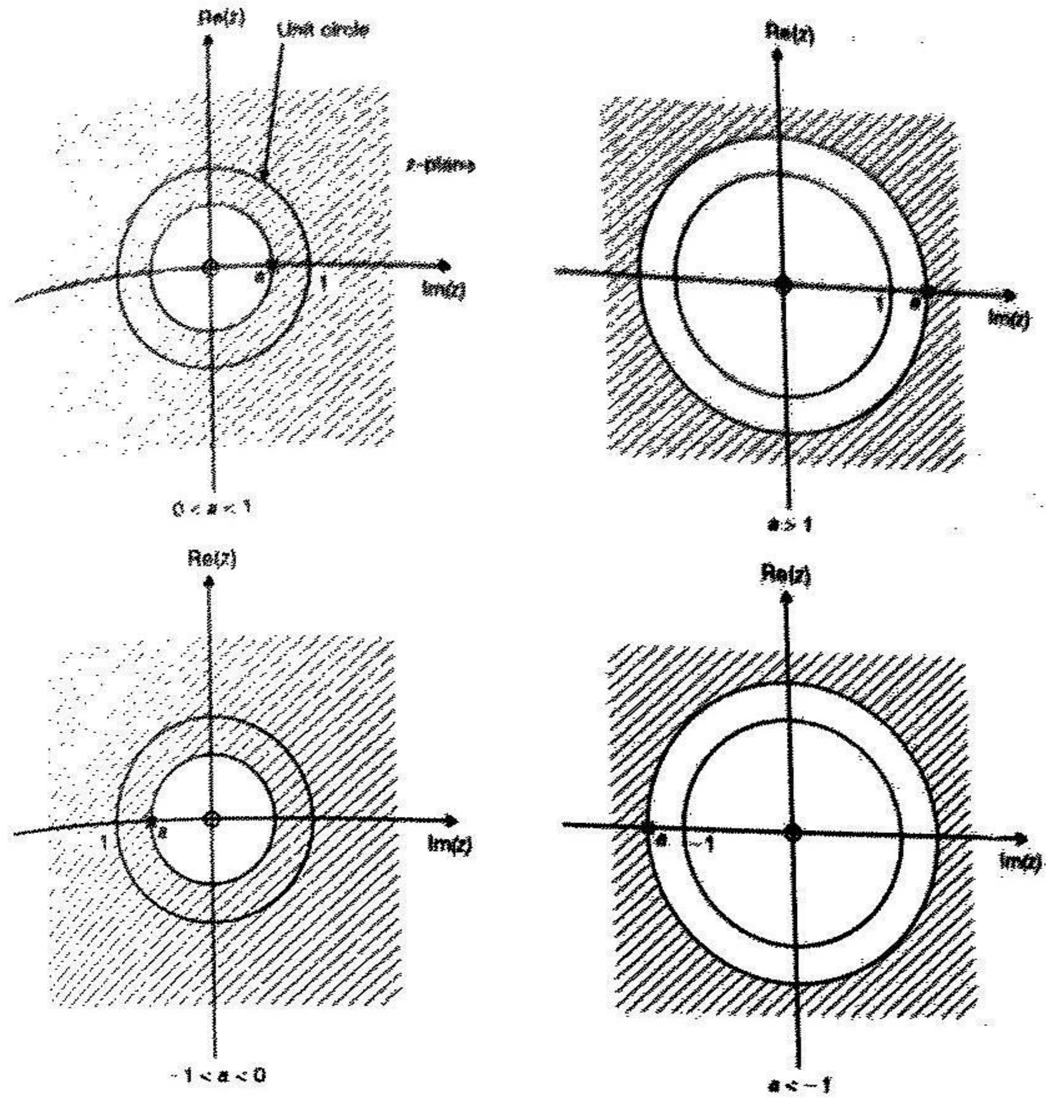
بنابراین، ناحیه همگرائی و نمودار قطب-صفرهای این مثال در شکل (۲.۴) نشان‌داده شده است. با مقایسه رابطه‌های (۹.۴) و (۱۲.۴) [یا (۱۰.۴) و (۱۳.۴)]، مشاهده می‌شود که رابطه جبری $X(z)$ برای هردو سیگنال مختلف یکسان است ولی ناحیه همگرائی آن‌ها، مانند تبدیل لاپلاس، متفاوت است.

۳.۲.۴ خواص ناحیه همگرائی:

به طوری که در تمرین ۴.۱ و ۴.۲ دیدیم، ناحیه همگرائی $X(z)$ به‌ماهیت $x[n]$ بستگی دارد. خواص ناحیه همگرائی در زیر حلاصه می‌شود. فرض بر این است که $X(z)$ یک تابع گویا است.

- **خاصیت اوّل** در ناحیه همگرائی هیچ قطبی وجود ندارد.

- **خاصیت دوّم** اگر سیگنال $x[n]$ دارای زمان طی معینی[۵] باشد، یعنی، سیگنال برای فواصل زمانی باستثناء $N_1 \le n \le N_2$ برابر $x[n] = 0$ ($-\infty < N_1$ و $N_2 < \infty$) باشد، در آن صورت ناحیه همگرائی تمام صفحه z، بجز $z = 0$ و $z = \infty$، را شامل می‌شود.



شکل ۱.۴: ناحیه همگرائی $|z| > |a|$

• **خاصیت سوم** اگر سیگنال $x[n]$ سمت راستی باشد، یعنی، برای $n < N_1 < \infty$ سیگنال $x[n] = 0$ باشد، و $X(z)$ برای برخی مقادیر z همگرا باشد، درآن صورت ناحیه همگرائی خواهد بود

$$|z| > r_{max} \quad \text{یا} \quad \infty > |z| > r_{max}$$

که در آن r_{max} بزرگ‌ترین مقدار هر قطبی است که در $X(z)$ وجود دارد. بنابراین ناحیه همگرائی خارج از دایره $|z| = r_{max}$ در صفحه زی بجز $z = \infty$ است.

• **خاصیت چهارم** اگر سیگنال سمت چپی باشد، یعنی، برای $n > N_2 > -\infty$ سیگنال $x[n] = 0$ باشد، و $X(z)$ برای برخی مقادیر z همگرا باشد، در آن صورت ناحیه همگرائی خواهد بود

$$|z| < r_{min} \quad \text{یا} \quad 0 < |z| < r_{min}$$

جدول ۱.۴: تبدیل زی

$x[n]$	$X(z)$	ROC
$\delta[n]$	1	تمام z
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}, \frac{z}{z-1}$	$\|z\| > 1$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}, \frac{z}{z-1}$	$\|z\| < 1$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}, \frac{z}{z-a}$	$\|z\| > \|a\|$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}, \frac{z}{z-a}$	$\|z\| < \|a\|$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \frac{az}{(z-a)^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \frac{az}{(z-a)^2}$	$\|z\| < \|a\|$
$(n+1)a^n u[n]$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^2}, \left(\frac{z}{z-a}\right)^2$	$\|z\| > \|a\|$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \frac{az}{(z-a)^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$(\cos \Omega_0 n)u[n]$	$\frac{z^2-(\cos \Omega_0)z}{z^2-(2\cos \Omega_0)z+1}$	$\|z\| > 1$
$(\sin \Omega_0 n)u[n]$	$\frac{(\sin \Omega_0)z}{z^2-(2\cos \Omega_0)z+1}$	$\|z\| > 1$
$(r^n \cos \Omega_0 n)u[n]$	$\frac{z^2-(r\cos \Omega_0)z}{z^2-(2r\cos \Omega_0)z+r^2}$	$\|z\| > r$
$(r^n \sin \Omega_0 n)u[n]$	$\frac{(r\sin \Omega_0)z}{z^2-(2r\cos \Omega_0)z+r^2}$	$\|z\| > r$
$a^n\ 0 \leq n \leq N-1, 0\ otherwise$	$\frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > 0$

۲.۴.۴ انتقال زمانی:

اگر

$$x[n] \longleftrightarrow X(z) \quad ROC = R$$

در این صورت

$$x[n-n_0] \longleftrightarrow z^{-n_0}X(z) \quad R' = R \cap \{0 < |z| < \infty\} \tag{۱۸.۴}$$

حالت خاص:

$$x[n-1] \longleftrightarrow z^{-1}X(z) \quad R' = R \cap \{0 < |z|\} \tag{۱۹.۴}$$

$$x[n+1] \longleftrightarrow zX(z) \quad R' = R \cap \{|z| < \infty\} \tag{۲۰.۴}$$

این روابط [رابطه (۱۹.۴) و (۲۰.۴)]، z^{-1} را اغلب **اپراتور واحد تاخیر**[۶] و z را **اپراتور واحد پیشرفت**[۷] می‌نامند. توجه کنید که در تبدیل لاپلاس اپراتور $s^{-1} = 1/s$ و s بترتیب مربوط به‌انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری در فضای زمان هستند. [رابطه (۲۲.۳) و (۲۰.۳)].

۳.۴.۴ ضرب z_0^n:

اگر

$$x[n] \longleftrightarrow X(z) \quad ROC = R$$

در این صورت

$$z_0^n x[n] \longleftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad R' = |z_0|R \tag{۲۱.۴}$$

به ویژه، یک قطب (یا صفر) در $z = z_k$ در $X(z)$ بعد از عمل ضرب توسط z_0^n به $z = z_0 z_k$ حرکت کرده و ناحیه همگرائی به‌اندازه‌ی عامل $|z_0|$ فشرده یا گسترده می‌شود. **حالت خاص:**

$$e^{j\Omega_0 n}x[n] \longleftrightarrow X\left(e^{-j\Omega_0}z\right) \quad R' = R \tag{۲۲.۴}$$

در این حالت خاص، تمام قطب‌ها و صفرها بقدر زاویه Ω_0 میچرخند و ناحیه همگرائی تغییر نمی‌کند.

۴.۴.۴ معکوس زمانی:

اگر

$$x[n] \longleftrightarrow X(z) \quad ROC = R$$

در این صورت

$$x[-n] \longleftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right) \quad R' = \frac{1}{R} \tag{۲۳.۴}$$

بنابراین، یک قطب (یا صفر) در $X(z)$ در $z = z_k$ به $1/z_k$ بعد از معکوس زمانی کردن حرکت می‌کند. رابطه $R' = \frac{1}{R}$ نشان می‌دهد عکس R، سمت راست را به‌سمت چپ و بر عکس سمت چپ را به‌سمت راست منعکس می‌کند.

۵.۴.۴ ضرب n:

اگر

$$x[n] \longleftrightarrow X(z) \quad ROC = R$$

در این صورت

$$nx[n] \longleftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz} \quad R' = R \tag{۲۴.۴}$$

۶.۴.۴ جمع کننده:

اگر

$$x[n] \longleftrightarrow X(z) \quad ROC = R$$

در این صورت

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \longleftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}X(z) = \frac{z}{z-1}X(z) \quad R' \supset R \cap \{|z| > 1\} \tag{۲۵.۴}$$

توجه کنید که $\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ زمان گسسته همتای انتگرال‌گیری در فضای زمان است که به‌ذخیره سازی موسوم است. اپراتور تبدیل لاپلاس قابل مقایسه با $1/s$ است.

۷.۴.۴ کانولوشن:

اگر

$$x_1[n] \longleftrightarrow X_1(z) \quad ROC = R_1$$

$$x_2[n] \longleftrightarrow X_2(z) \quad ROC = R_2$$

در این صورت

$$x_1[n] * x_2[n] \longleftrightarrow X_1(z)X_2(z) \quad R' \supset R_1 \cap R_2 \tag{۲۶.۴}$$

این رابطه نقش مهمی در تحلیل و طراحی سیستم‌های زمان گسسته LTI دارد و مانند حالت زمان پیوسته است.

۸.۴.۴ خلاصه‌ای از خواص تبدیل زی:

خلاصه‌ای از خواص تبدیل زی که در این بخش مطالعه شد در جدول (۴.۲) آورده شده است.

جدول ۲.۴: خواص تبدیل زی

خواص	سیگنال	تبدیل	ROC
	$x[n]$	$X(z)$	R
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_1
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_2
خطی بودن	$a_1x_1[n]+a_2x_2[n]$	$a_1X_1(z)+a_2X_2(z)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$
انتقال زمانی	$x[n-n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	$R' \supset R \cap \{0<\lvert z\rvert<\infty\}$
ضرب z_0^n	$z_0^n x[n]$	$X(\frac{z}{z_0})$	$R' = \lvert z_0\rvert R$
ضرب $e^{j\Omega_0 n}$	$e^{j\Omega_0 n}x[n]$	$X(e^{-j\Omega_0}z)$	$R' = R$
معکوس زمانی	$x[-n]$	$X(\frac{1}{z})$	$R' = \frac{1}{R}$
ضرب n	$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	$R' = R$
جمع کردن	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	$R' \supset R \cap \{\lvert z\rvert>1\}$
کانولوشن	$x_1[n]*x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$

۵.۴ عکس تبدیل زی

پیداکردن $x[n]$ از تبدیل زی $X(z)$ را عکس تبدیل زی گویند و از نظر نمادین چنین نمایش می‌دهند.

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} \tag{۲۷.۴}$$

۱.۵.۴ رابطه عکس تبدیل زی:

مانند تبدیل لاپلاس، رابطه‌ای نیز برای عکس تبدیل زی وجود دارد که بر حسب انتگرال‌گیری در صفحه زی انجام می‌شود، یعنی

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz \tag{۲۸.۴}$$

که در آن C انتگرال کانتور عکس چرخش ساعت است که مبداء را دربر گرفته است. محاسبه اصولی رابطه (۲۸.۴) مستلزم دانستن متغیرهای مختلط است.

۲.۵.۴ استفاده از جدول تبدیل زی:

روش دومی که وجود دارد بیان و بسط تابع $X(z)$ بر حسب توابع شناخته شده است

$$X(z) = X_1(z) + \cdots + X_n(z) \tag{۲۹.۴}$$

که در آن $X_1(z), \cdots, X_m(z)$ توابع شناخته شده و معروفی هستند که دارای عکس تبدیل زی $x_1[n], \cdots, x_m[n]$ هستند و طبق خواص خطی بودن نتیجه می‌شود که

$$x[n] = x_1[n] + \cdots + x_m[n] \tag{۳۰.۴}$$

۷.۴ تبدیل زی یکطرفه

۱.۷.۴ تعریف:

تبدیل زی یکطرفه $x[n]$ با $X_I(z)$ نشان داده می‌شود و چنین تعریف می‌شود [رابطه (۴.۵)]

$$X_I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} \qquad (۴۹.۴)$$

و از تبدیل زی دوطرفه در جمع کردن $n \geq 0$ آن تفاوت دارد. بنابراین تبدیل زی یکطرفه $x[n]$ را می‌توان تبدیل زی دو طرفه سیگنال $x[n]u[n]$ دانست. چون $x[n]u[n]$ یک سیگنال سمت راستی است، ناحیه همگرائی $X_I(z)$ همیشه خارج از دایره در صفحه زی خواهد بود.

۲.۷.۴ خواص اصلی:

اکثر خواص تبدیل زی یکطرفه شبیه تبدیل زی دوطرفه است. تبدیل زی یکطرفه وسیله خوبی برای محاسبه پاسخ سیستم‌های علّی بازاء ورودی سیگنال علّی است وقتی سیستم با معادلات ضرایب ثابت و شرایط اولیه غیر صفر توصیف می‌شود. خواص اصلی تبدیل زی یکطرفه برای کابردهائی از قبیل خاصیت انتقال که متفاوت از حالت دوطرفه است، بسیار مفید خواهد بود.

خاصیت انتقال زمانی:

اگر $x[n] \longleftrightarrow X_I(z)$ باشد، برای $m \geq 0$ داریم

$$x[n-m] \longleftrightarrow z^{-m} X_I(z) + z^{-m+1} x[-1] + z^{-m+2} x[-2] + \cdots + x[-m] \qquad (۵۰.۴)$$

$$x[n+m] \longleftrightarrow z^{m} X_I(z) - z^{m} x[0] - z^{m-1} x[1] - \cdots - z x[m-1] \qquad (۵۱.۴)$$

اثبات روابط (۵۰.۴) و (۵۱.۴) در مسئله ۴.۳۶ آورده شده است.

۸.۴ تابع انتقال سیستم:

شبیه حالت سیستم‌های LTI زمان پیوسته، تبدیل زی یکطرفه تابع سیستم $H(z) = Y(z)/X(z)$ وقتی سیستم درحال استراحت باشد یعنی تمام شرایط اولیه سیستم صفر باشد، تعریف می‌شود.

۹.۴ مسائل حل شده

۱. تبدیل زی سیگنال‌های زیر را بدست آورید.

- (الف)- $x[n] = -a^n u[-n-1]$

• (ب)- $x[n] = a^{-n}u[-n-1]$

حل:

• (الف)- از رابطه (۳.۴) داریم

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} (a^{-1}z)^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n$$

طبق رابطه (۹۱.۱)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n = \frac{1}{1-a^{-1}z} \qquad \text{اگر } |a^{-1}z| < 1 \text{ یا } |z| < |a|$$

بنابراین

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z| < |a| \tag{۵۲.۴}$$

• (ب)- به همین نحو

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{-n}u[-n-1]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (az)^{-n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (az)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (az)^n - 1$$

دوباره طبق رابطه (۹۱.۱)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (az)^n = \frac{1}{1-az} \qquad \text{اگر } |az| < 1 \text{ یا } |z| < \frac{1}{|a|}$$

بنابراین

$$X(z) = \frac{1}{1-az} - 1 = \frac{az}{1-az} = \frac{z}{z-1/a} \qquad |z| < \frac{1}{|a|} \tag{۵۳.۴}$$

۲. سیگنالی به‌صورت زیر مفروض است.

$$x[n] \begin{cases} \neq 0 & N_1 \leq n \leq N_2 \\ \\ = 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در آن N_1 و N_2 معین هستند. ثابت کنید که ناحیه همگرائی $X(z)$ تمام صفحه زی باستثناء $z = 0$ یا $z = \infty$ است.

حل:

از رابطه (۳.۴) داریم

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] z^{-n} \tag{۵۴.۴}$$

برای z برابر صفر یا بینهایت، هر جمله در رابطه (۵۴.۴) معین بوده و بنابراین $X(z)$ همگرا خواهد شد. اگر $N_1 < 0$ و $N_2 > 0$، بنابراین (۵۴.۴) شامل جملاتی ازهر دو نوع توان مثبت و منفی z است. چون $|z| \longrightarrow 0$ جملات با توان منفی z نامعین می‌شود. اگر $|z| \longrightarrow \infty$ جملات با توان مثبت z نامعین بوده بنابراین، ناحیه همگرائی تمام صفحه زی باستثناء $z = 0$ و $z = \infty$ است. اگر $N_1 \geq 0$ باشد، رابطه (۵۴.۴) شامل جملاتی با توان منفی z خواهد بود و ازاینرو ناحیه همگرائی شامل $z = \infty$ است. اگر $N_2 \leq 0$ باشد، رابطه (۵۴.۴) شامل فقط توان‌های مثبت z خواهد بود، و ناحیه همگرائی $z = 0$ را در بر می‌گیرد.

۳. سیگنالی به‌صورت زیر مفروض است.

$$x[n] = 5\delta[n+2] + 3\delta[n+1] - 2\delta[n] + 4\delta[n-2] - 3\delta[n-3]$$

تبدیل زی $X(z)$ و ناحیه همگرائی آن را بدست آورید.

حل:

از رابطه (۳.۴) و سیگنال مفروض $x[n]$ داریم

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-2}^{3} x[n]z^{-n} \\ &= x[-2]z^2 + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + x[3]z^{-3} \\ &= 5z^2 + 3z - 2 + 4z^{-2} - 3z^{-3} \end{aligned}$$

برای z های غیر صفر وبینهایت، هر جمله در $X(z)$ معین بوده و در نتیجه $X(z)$ همگرا است. توجه داشته باشید که $X(z)$ شامل توان‌های مثبت و منفی z است. بنابراین، از نتیجه مسئله ۴.۲ نتیجه می‌شود که ناحیه همگرائی $X(z)$ برابر $0 < |z| < \infty$ خواهد بود.

۴. سیگنال زیر را در نظر گیرید.

$$x[n] = \begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq N-1, a > 0 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تبدیل زی $X(z)$ را پیدا کرده و قطب‌ها و صفرهای آن را رسم کنید.

حل:

طبق رابطه (۳.۴) و استفاده از رابطه (۹۰.۱) خواهیم داشت

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n = \frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z-a} \qquad (۵۵.۴)$$

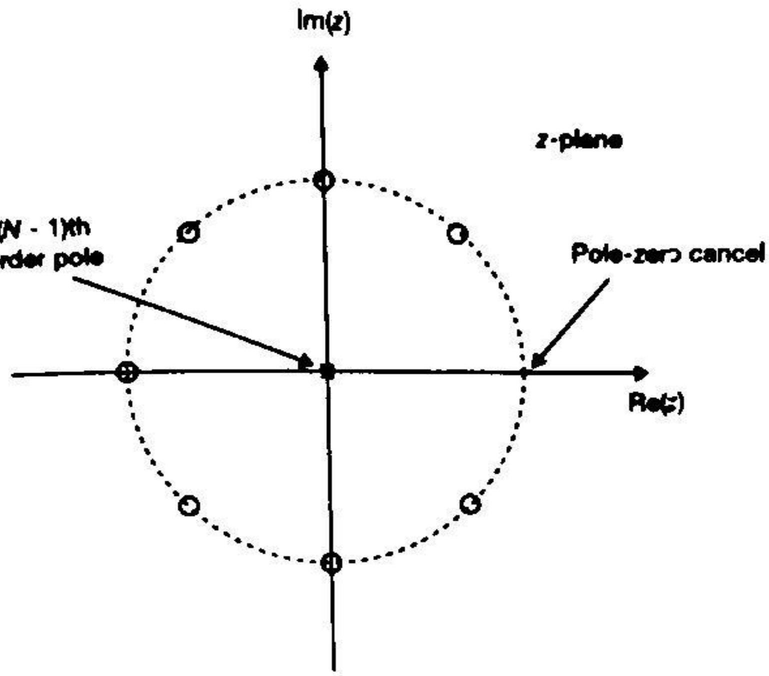
از رابطه (۵۵.۴) مشاهده می‌شود که قطبی از مرتبه $(N-1)$ام در $z = 0$ و یک قطب در $z = 1$ وجود دارد. چون $x[n]$ یک سیگنال معین است و برای $n < 0$ صفر است، ناحیه همگرائی $|z| > 0$ است. N ریشه صورت خواهند بود:

$$z_k = ae^{j(2\pi k/N)} \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1 \qquad (۵۶.۴)$$

ریشه $k=0$ قطب $z=a$ حذف می‌کند. بقیه صفرهای $X(z)$ برابر است با:

$$z_k = ae^{j(2\pi k/N)} \quad k=1,\cdots,N-1 \tag{۵۷.۴}$$

نمودار قطب‌ها و صفرها در شکل (۴.۴) نشان داده شده است.



شکل ۴.۴: نمودار قطب‌ها و صفرها با $N=8$

۵. ثابت کنید که اگر $x[n]$ یک سیگنال سمت راستی باشد و $X(z)$ برای برخی مقادیر z همگرا باشد، ناحیه همگرائی $X(z)$ به‌صورت زیر است

$$|z| > r_{max} \quad \text{یا} \quad \infty > |z| > r_{max}$$

که در آن r_{max} بیشینه مقدار هر قطبی است که در $X(z)$ وجود دارد.

حل:

فرض کنید که سیگنال $x[n]$ سمت راستی است، بنابراین

$$x[n]=0 \quad n<N_1$$

و $X(z)$ برای $|z|=r_0$ همگرا است. در این صورت طبق رابطه (۳.۴)

$$|X(z)| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} = \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} < \infty$$

اکنون اگر $r_1 > r_0$ باشد، بنابراین

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_1^{-n} = \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| \left(r_0 \frac{r_1}{r_0}\right)^{-n} = \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{-n}$$

$$\le \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{-N_1} \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} < \infty$$

چون $\left(r_0\frac{r_1}{r_0}\right)^{-n}$ یک سری میرا شونده است. بنابراین، $X(z)$ برای $r = r_1$ همگرا می‌شود و ناحیه همگرائی $X(z)$ به‌صورت زیر است.

$$|z| > r_0$$

چون ناحیه همگرائی $X(z)$ نمی‌تواند شامل قطب‌های $X(z)$ باشد، چنین نتیجه می‌شود که ناحیه همگرائی به‌صورت زیر است.

$$|z| > r_{max}$$

که در آن r_{max} بیشینه مقدار هرقطبی است که در $X(z)$ وجود دارد.
اگر $N_1 < 0$ باشد، بنابراین

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{\infty} x[n]z^{-n} = x[N_1]z^{-N_1} + \cdots + x[-1]z + \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

یعنی، $X(z)$ شامل توان‌های مثبت z و در $z = \infty$ نامعین می‌شود. در این حالت ناحیه همگرائی به‌صورت زیر است.

$$\infty > |z| > r_{max}$$

از نتیجه بالا می‌توان گفت که اگر ناحیه همگرائی $X(z)$، $z = \infty$ را شامل شود، سیگنال $x[n]$ یک سیگنال سمت راستی علّی است. توجه کنید که این حالت در تبدیل لاپلاس وجود ندارد.

۶. تبدیل زی سیگنال‌های زیر را بدست آورده و نمودار قطب‌ها و صفرها را بهمراه ناحیه همگرائی آن‌ها رسم کنید.

- (الف)- $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] + (\frac{1}{3})^n u[n]$
- (ب)- $x[n] = (\frac{1}{3})^n u[n] + (\frac{1}{2})^n u[-n-1]$
- (ج)- $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] + (\frac{1}{3})^n u[-n-1]$

حل:

- (الف)- از جدول ۴.۱ داریم

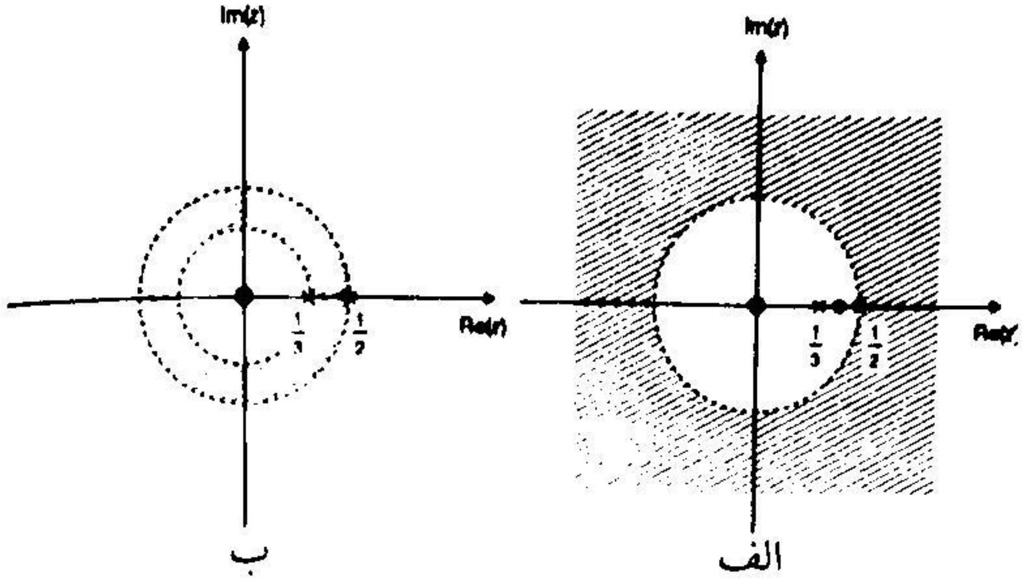
$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \quad |z| > \frac{1}{2} \qquad (۵۸.۴)$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-\frac{1}{3}} \quad |z| > \frac{1}{3} \qquad (۵۹.۴)$$

مشاهده می‌کنیم که ناحیه همگرائی در رابطه (۵۸.۴) و (۵۹.۴) هم‌پوشانی دارد و بنابراین

$$X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{z}{z-\frac{1}{3}} = \frac{2z(z-\frac{5}{12})}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})} \quad |z| > \frac{1}{2} \qquad (۶۰.۴)$$

از رابطه (۶۰.۴) مشاهده می‌شود که $X(z)$ دارای دو صفر در $z = 0$ و $z = \frac{5}{12}$ و دو قطب در $z = \frac{1}{2}$ و $z = \frac{1}{3}$ و ناحیه همگرائی در $|z| > \frac{1}{2}$ واقع است. این‌ها



شکل ۵.۴:

• (ب)- از جدول ۴.۱ داریم

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-\frac{1}{3}} \quad |z| > \frac{1}{3} \qquad (۶۱.۴)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \longleftrightarrow -\frac{z}{z-\frac{1}{2}} \quad |z| < \frac{1}{2} \qquad (۶۲.۴)$$

مشاهده می‌شود که ناحیه همگرائی در رابطه (۶۱.۴) و (۶۲.۴) هم‌پوشانی وجود دارد و ازاینرو

$$X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{3}} - \frac{z}{z-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{6}\frac{z}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})} \quad \frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2} \qquad (۶۳.۴)$$

از رابطه (۶۳.۴) دیده می‌شود که $X(z)$ یک صفر در $z = 0$ و دو قطب در $z = \frac{1}{2}$ و $z = \frac{1}{3}$ دارد. ناحیه همگرائی $X(z)$ برابر $\frac{1}{2} > |z| > \frac{1}{3}$ و این‌ها در شکل (۵.۴)(ب) ترسیم شده است.

• (ج)- از جدول ۴.۱ داریم:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \quad |z| > \frac{1}{2} \qquad (۶۴.۴)$$

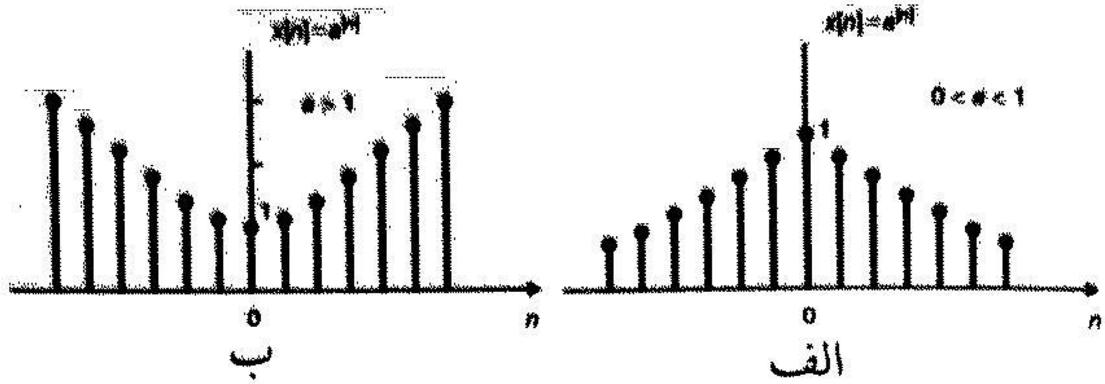
$$\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] \longleftrightarrow -\frac{z}{z-\frac{1}{3}} \quad |z| < \frac{1}{3} \qquad (۶۵.۴)$$

مشاهده می‌شود که ناحیه همگرائی در رابطه (۶۴.۴) و (۶۵.۴) هم‌پوشانی وجود ندارد و ازاینرو $x[n]$ دارای تبدیل زی نیست.

۷. فرض کنید

$$x[n] = a^{|n|} \quad a > 0 \qquad (۶۶.۴)$$

• (ب)- تبدیل زی $X(z)$ را بدست آورده و نمودار قطب‌ها وصفرها و ناحیه همگرائی را برای $a < 1$ و $a \geqslant 1$ ترسیم نمائید.
حل:



شکل ۶.۴:

• (الف)- سیگنال $x[n]$ در شکل (۶.۴)(الف) و (ب) برای $a < 1$ و $a > 1$ نشان داده شده است.

• (ب)- چون $x[n]$ یک سیگنال دوطرفه است، رابطه آن را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد.

$$x[n] = a^n u[n] + a^{-n} u[-n-1] \qquad (۶۷.۴)$$

از جدول ۴.۱ داریم

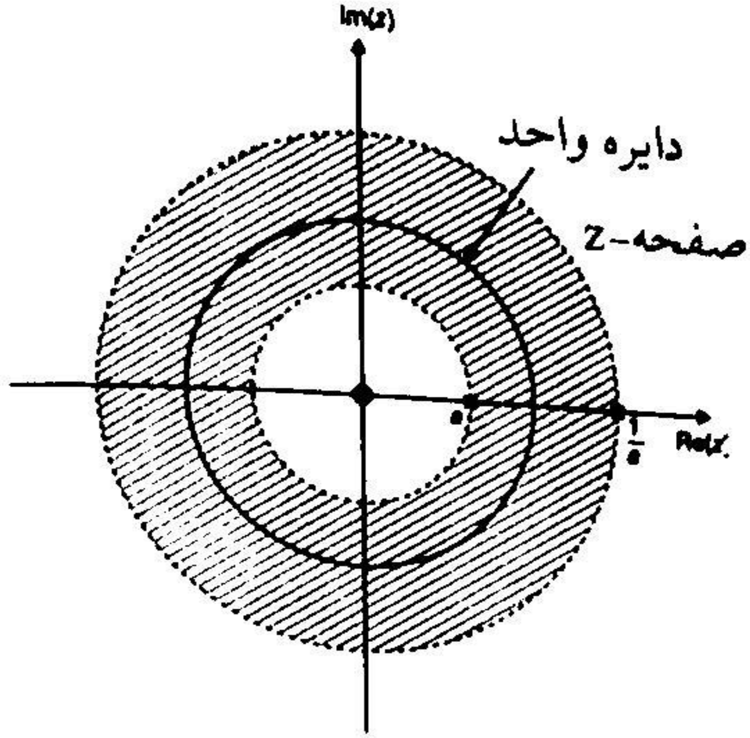
$$a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-a} \quad |z| > a \qquad (۶۸.۴)$$

$$a^{-n} u[-n-1] \longleftrightarrow -\frac{z}{z-\frac{1}{a}} \quad |z| < \frac{1}{a} \qquad (۶۹.۴)$$

اگر $a < 1$ باشد، دیده می‌شود که ناحیه همگرائی در رابطه (۶۸.۴) و (۶۹.۴) هم‌پوشانی دارند و در این صورت

$$X(z) = \frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-\frac{1}{a}} = \frac{a^2-1}{a} \frac{z}{(z-a)(z-\frac{1}{a})} \quad a < |z| < \frac{1}{a} \qquad (۷۰.۴)$$

همان طوری که از رابطه (۷۰.۴) مشاهده می‌شود، $X(z)$ دارای یک صفر در مبداء و دو قطب در $z = a$ و $z = 1/a$ دارد و ناحیه همگرائی برابر $a < |z| < \frac{1}{a}$ که در شکل (۷.۴) ترسیم شده است. اگر $a > 1$ باشد، مشاهده می‌شود که ناحیه همگرائی رابطه (۶۸.۴) و (۶۹.۴) هیچ‌گونه هم‌پوشانی نداشته و بنابراین ناحیه همگرائی مشترک وجود ندارد و ازاینرو $x[n]$ تبدیل زی ندارد.



شکل ۷.۴:

خواص تبدیل زی

۸. خاصیت انتقال زمانی رابطه (۱۸.۴) را اثبات کنید. یعنی

$$x[n-n_0] \longleftrightarrow z^{-n_0}X(z) \qquad R' \supset R \cap \{0 < |z| < \infty\}$$

حل:
طبق تعریف (۳.۴)

$$\mathcal{Z}\{x[n-n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0]z^{-n}$$

با تغییر متغیر $m = n - n_0$، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{x[n-n_0]\} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-(m+n_0)} \\ &= z^{-n_0}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-m} = z^{-n_0}X(z)\end{aligned}$$

به علت ضرب z^{-n_0}، برای $n_0 > 0$، قطب‌های اضافی در $z = 0$ معرفی و در $z = \infty$ حذف می‌شود. به‌همین منوال، اگر $n_0 < 0$ باشد، صفرهای اضافی در $z = 0$ معرفی و در $z = \infty$ حذف می‌شود. بنابراین، نقاط $z = 0$ و $z = \infty$ می‌تواند از ناحیه همگرائی بوسیله انتقال زمانی اضافه و یا حذف شود. بنابراین خواهیم داشت

$$x[n-n_0] \longleftrightarrow z^{-n_0}X(z) \qquad R' \supset R \cap \{0 < |z| < \infty\}$$