فیزیک 2 :

«بسم الله الرحمن الرحیم»

کتاب درسی : فیزیک دانشگاهی جلد سوم (الکتریسیته و مغناطیس)

تألیف : آلوین هودسون - رکس نلسون

انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان

برنامه‌ی درسی : فصل‌های 24 تا 35

مراجع دیگر : تمامی کتابهای فیزیک پایه : اصول فیزیک ویرایش نهم ، جلد 2 تألیف هالیدی

فصل اوّل (بخش اول فصل 24 کتاب درسی) : بار الکتریکی و ماده - قانون کولن - الکتریسیته و مغناطیس

چند تعریف ساده :

فیزیک : شناخت نیروی بنیادی طبیعت و تعیین قوانین حاکم بر آنها

← همه‌ی عناصر طبیعت از اتم که ساخته شده اند . اتم که خود از هسته و مدار چرخش الکترون تشکیل شده‌اند .

شعاع اتم که در رابطه با آنگستروم است . $1A^\circ = 10^{-10} m$

شعاع هسته اتم با $1F = 10^{-15} m$ اندازه‌گیری می‌شود .

نیروهای وارده در یک اتم :

1. نیروی گرانشی
2. نیروی الکترومغناطیس
3. نیروی هسته ای

$A = N + Z$ ★ عدد جرمی

N تعداد نوترونها

Z تعداد الکترونها = تعداد پروتونها

★ منشاء اصلی نیروی الکتریکی و منشاء اصلی نیروی مغناطیسی همان بار الکتریکی است .

★ بار الکتریکی بر دو نوع است : ⊕ و ⊖

★ بار الکتریکی کوانتیده است مقدارش پیوسته نیست

★ بار الکتریکی پایسته است .

بار یک الکترون

$1e = 1{,}6 \times 10^{-19} C$

رسانا ها و نارسانا ها (دی الکتریک ها یا عایق ها) :

insulatory , conductory

بار الکتریکی در رسانا به راحتی حرکت می کند .

★ $R = \rho \frac{l}{A}$ (ρ : مقاومت ویژه)

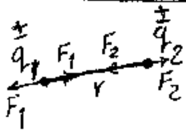
$\sigma = \frac{1}{\rho}$ رسانندگی

★ فلزات $\rho = 10^{-8}$

★ شیشه $\rho = 10^{+13}$

فیزیک 2 :

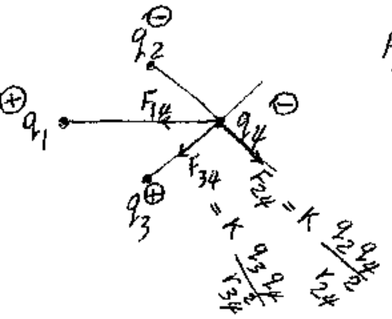
*قانون کولن :



$q = ne$ ⋆ $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ ⋆ $K = 9\times10^9\ N.m^2/c^2$, $F = K\frac{q_1q_2}{r^2}$

ضریب گذردهی خلا $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi K} = 8.85\times10^{-12}\ c^2/N.m^2$, $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{q_1q_2}{r^2}$

⋆ $F_2 = F_1 = F = K\frac{q_1q_2}{r^2}$

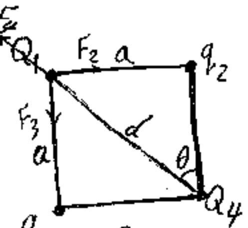


$F_{14} = K\frac{q_1q_4}{r_{14}^2}$

⋆ $\vec{F_4} = \vec{F_{14}} + \vec{F_{24}} + \vec{F_{34}}$

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} \Rightarrow \begin{cases} \vec{F_1} = F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j} + F_{1z}\vec{k} \\ \vec{F_2} = F_{2x}\vec{i} + F_{2y}\vec{j} + F_{2z}\vec{k} \\ \vec{F_3} = F_{3x}\vec{i} + F_{3y}\vec{j} + F_{3z}\vec{k} \end{cases}$$

(8-17) فیزیک هالیدی ویرایش 8 : رابطه بین q و Q را چنان بدست آورید که نیروی برایند وارد بر هر Q صفر شود.



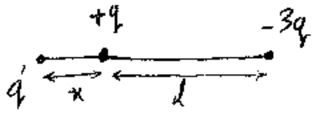
$d^2 = 2a^2$

اولاً لازم است q و Q مختلف العلامه باشند.

$$\begin{cases} F_2 = K\frac{qQ}{a^2} \Rightarrow \vec{F_2} = F_2\vec{i} \\ F_3 = K\frac{qQ}{a^2} \Rightarrow \vec{F_3} = -F_3\vec{j} \\ F_4 = K\frac{Q^2}{2a^2} \Rightarrow \vec{F_4} = -F_4\sin\theta\vec{i} + F_4\cos\theta\vec{j} = \frac{-\sqrt{2}}{2}F_4\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}F_4\vec{j} \end{cases}$$

$$F = \underbrace{(F_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}F_4)}_{\text{صفر}}\vec{i} + (-F_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}F_4)\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} F_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}F_4 \\ K\frac{qQ}{a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}K\frac{Q^2}{2a^2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{q = \frac{\sqrt{2}}{4}Q,\ Q = 2\sqrt{2}q}$$

(17-15) محل بار سوم q' را چنان پیدا کنید که نیروی برایند وارد بر q' صفر شود.



$q = 1\mu c$

$$\frac{Kqq'}{x^2} = \frac{K(-3q)(q')}{(l+x)^2} \Rightarrow 3x^2 = (l+x)^2 \Rightarrow \sqrt{3}x = \pm(l+x) \xRightarrow{1} \sqrt{3}x = -l-x \Rightarrow \sqrt{3}x + x = -l \Rightarrow x = \cancel{\frac{-l}{1+\sqrt{3}}}$$

$$2\ \ \sqrt{3}x = l+x \Rightarrow \sqrt{3}x - x = l \Rightarrow x(\sqrt{3}-1) = l \Rightarrow x = \frac{l}{\sqrt{3}-1} = \frac{10}{0.7}$$

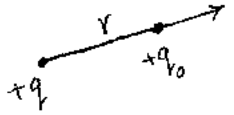
تمرین : محل و بزرگی بار سوم q' را چنان پیدا کنید که نیروی برایند وارد بر کل دستگاه صفر شود.

+ (17-54) هالیدی

*میدان الکتریکی (Electric field):

بنا به تعریف شدت میدان الکتریکی در یک نقطه از فضا برابر است با نیرویی که بر واحد بار مثبت در آن نقطه وارد می آید. بنابراین اگر نیروی وارد بر یک بار آزمون مثبت q_0 در یک نقطه برابر F باشد، می توان گفت شدت میدان در آن نقطه چنین است. $\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}$

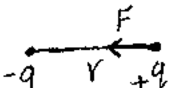
*مثال: بار نقطه ای $+q$ مفروض است. داریم:



$$F=K\frac{qq_0}{r^2} \Rightarrow \frac{F}{q_0}=K\frac{q}{r^2} \Rightarrow \boxed{E=\frac{Kq}{r^2}}$$

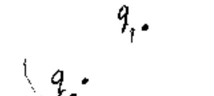
میدان به سمت خارج بار

بار نقطه ای $-q$ مفروض است. میدان به سمت داخل بار



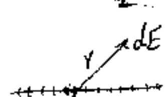
$$F=K\frac{qq_0}{r^2} \Rightarrow E=\frac{F}{q_0}=K\,q/r^2$$

برای یک توزیع ناپیوسته بار داریم:



$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3+\vec{E}_4 \Rightarrow *\vec{E}=\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i$$

و برای یک توزیع پیوسته بار داریم:

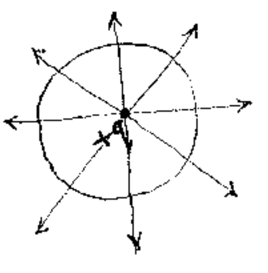


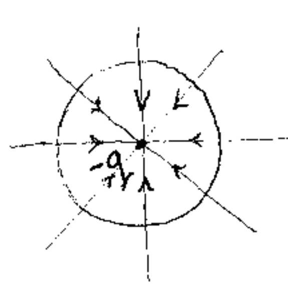
$$dE=K\frac{dq}{r^2} \Rightarrow *\vec{E}=\int d\vec{E}$$

*خطوط میدان (یا نیروی) الکتریکی:

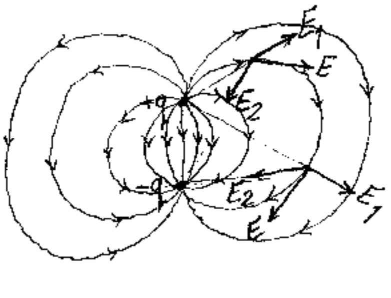
1) تعداد این خطوط در هر ناحیه نشانگر شدت میدان در آن ناحیه است.

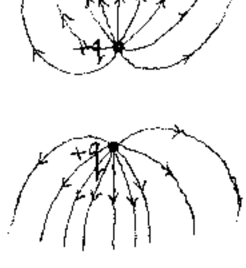
2) مماس بر خط میدان در هر نقطه، $\vec{E}$ را در آن نقطه مشخص می کند.

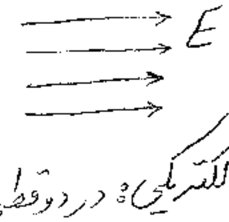




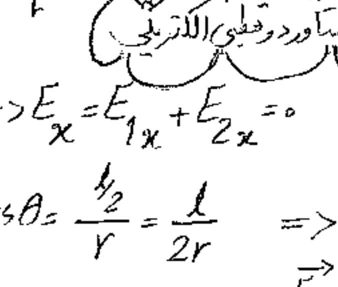
*نکته: یک میدان یکنواخت را توسط خطوط موازی و متساوی الفاصله نمایش می دهیم.







مثال دوقطبی الکتریکی: در دوقطبی الکتریکی شکل روبرو مطلوبست: E_q ؟



$$E_1=E_2=\frac{Kq}{r^2}$$

$\boxed{P=ql}$ گشتاور دوقطبی الکتریکی

$$E_{1x}=E_1\sin\theta \qquad E_{1y}=-E_1\cos\theta$$

$$E_{2x}=-E_2\sin\theta \qquad E_{2y}=-E_2\cos\theta$$

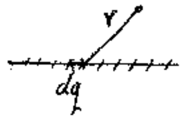
$$\Rightarrow E_x=E_{1x}+E_{2x}=0 \qquad E_y=E_{1y}+E_{2y}=-E_1\cos\theta-E_2\cos\theta=-2E_1\cos\theta=-2K\frac{q}{r^2}\cos\theta$$

$$\cos\theta=\frac{l/2}{r}=\frac{l}{2r} \Rightarrow E_y=-2K\frac{q}{r^2}\cdot\frac{l}{2r}=-K\frac{ql}{(l^2/4+x^2)^{3/2}}=-K\frac{P}{(l^2/4+x^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \vec{E}=\frac{-KP}{(l^2/4+x^2)^{3/2}}$$

فیزیک 2:

$\lambda = \frac{dq}{dl}$ چگالی خطی بار یا بار در واحد طول $\Rightarrow dq = \lambda dl$ کلی است. $\Rightarrow \int dq = \int \lambda dl \Rightarrow q = \int \lambda dl = \begin{cases} q = \lambda \int dl & \text{اگر } \lambda \text{ ثابت} \\ q = \lambda l & \text{در حالت خاص} \end{cases}$



1) توزیع خطی «λ»: میدان حاصل از توزیع پیوسته‌ی بار

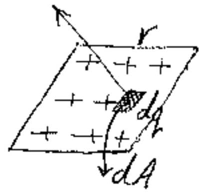
$$dE = K\frac{dq}{r^2} \Rightarrow \vec{E} = \int d\vec{E}$$

2) توزیع سطحی «σ»:

σ چگالی سطحی بار یا بار در واحد سطح

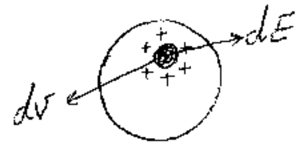
ρ چگالی حجمی بار یا بار در واحد حجم

$$dq = \sigma dA \Rightarrow \int dq = \int \sigma dA \xrightarrow{\text{اگر } \sigma \text{ ثابت}} \boxed{q = \sigma A}$$



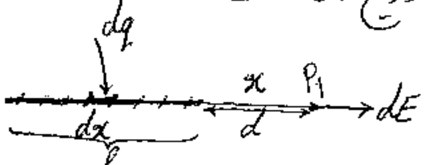
3) توزیع حجمی «ρ»:

$$dq = \rho dv \Rightarrow q = \int \rho dv \xrightarrow{\text{اگر } \rho \text{ ثابت}} \boxed{q = \rho V}$$



مثال 1: بار الکتریکی کل q+ بطور یکنواخت روی یک میله‌ی نازک و نارسانای بطول l توزیع شده است.

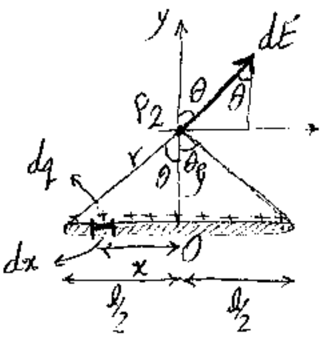
الف) $\vec{E}$ را در نقطه‌ی P_1 واقع در امتداد میله و به فاصله‌ی d از یک سر میله بدست آورید.



$$dE = K\frac{dq}{x^2} \Rightarrow E = \int dE = \underbrace{\int K\frac{dq}{x^2}}_{\text{روی کل بار}} = \underbrace{\int K\frac{\lambda dx}{x^2}}_{\text{روی کل میله}} \Rightarrow E = K\lambda\int_d^{d+l}\frac{dx}{x^2} = K\lambda\left[\frac{-1}{x}\right]_d^{d+l}$$

$$E = K\lambda\left[\frac{-1}{d+l} + \frac{1}{d}\right] \Rightarrow \text{به سمت راست } E = K\lambda\left[\frac{1}{d} - \frac{1}{d+l}\right] = \frac{Kq}{l}\left[\frac{1}{d} - \frac{1}{d+l}\right]$$

2*: بار الکتریکی q بطور یکنواخت روی یک میله‌ی نارسانای نازک بطول l توزیع شده است. مطلوبست $\vec{E}$ در نقطه‌ی P_2 واقع بر عمود منصف میله و به فاصله‌ی y از میله.



$$dE = K\frac{dq}{r^2} \qquad dq = \lambda dx$$

$$E_x = \int dE_x = \int dE\sin\theta = 0$$

$$E_y = \int dE_y = \int dE\cos\theta = \underbrace{\int K\frac{dq}{r^2}\cos\theta}_{\text{روی کل بار}}$$

$\star\ dx = \frac{y}{\cos^2\theta}d\theta$

$\begin{cases} x = y\tan\theta \\ dx = y(1+\tan^2\theta)d\theta = \frac{y}{\cos^2\theta}d\theta \end{cases}$ مشتق گیری

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow r = \frac{y}{\cos\theta} \\ \tan\theta = \frac{x}{y} \end{cases}$

$\lambda = \frac{q}{l}$

$$E_y = \underbrace{K\lambda\int\frac{dx}{r^2}\cos\theta}_{\text{روی کل میله}} = K\lambda\int\frac{\frac{y}{\cos^2\theta}d\theta}{\frac{y^2}{\cos^2\theta}}\cos\theta$$

$$\sin\theta_0 = \frac{l/2}{\sqrt{y^2 + \frac{l^2}{4}}}$$

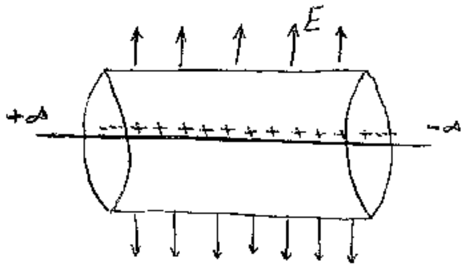
$$E_y = \frac{K\lambda}{y}\int_{-\theta_0}^{+\theta_0}\cos\theta d\theta = \frac{K\lambda}{y}\left[\sin\theta\right]_{-\theta_0}^{+\theta_0} = \frac{K\lambda}{y}\left[\sin\theta_0 - \sin(-\theta_0)\right] = \frac{2K\lambda}{y}\sin\theta_0$$

$$E_y = \frac{2K\lambda}{y} \times \frac{l/2}{\sqrt{y^2 + l^2/4}} = \frac{K\lambda}{y} \times \frac{l}{\sqrt{y^2 + l^2/4}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y} \times \frac{l}{\sqrt{4y^2 + l^2}} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 y\sqrt{4y^2 + l^2}}$$

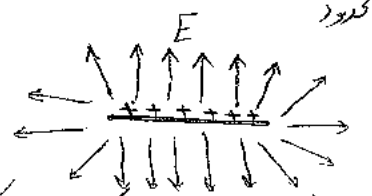
مثال: یک میله به طول ∞ و چگالی خطی بار λ ثابت مفروض است. E را در فاصله y از میله بدست آورید.
هرگاه به روش مثال قبل مسئله را حل کنیم خواهیم داشت،

$$E=\frac{2K\lambda}{y}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}$$

برای خط بار ∞



برای میله محدود

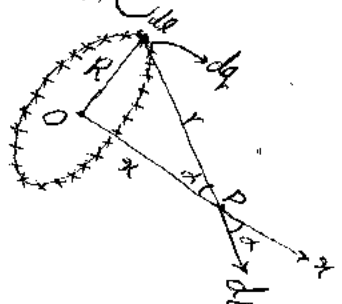


مسئله 40 فصل 24 هودلوت: بار الکتریکی با چگالی سطحی ثابت σ روی سطح یک صفحه نازک و نارسانای به عرض a و طول ∞ توزیع شده است. E را در نقطه P به فاصله d از لبه بالائی صفحه بدست آورید. (P و صفحه باردار هردو در یک صفحه‌اند)

$$\lambda=\sigma\,dz \qquad dl\times dz=dA$$

$$E=\int dE=\int_0^a\frac{\sigma\,dz}{2\pi\varepsilon_0(d+z)}=\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\Big[\ln(d+z)\Big]_0^a=\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\Big[\ln(d+a)-\ln d\Big]\Rightarrow E=\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d+a}{d}$$

مثال: (حلقه باردار) بار کل q به طور یکنواخت روی یک حلقه دایره‌ای شکل به شعاع R توزیع شده است. E را در نقطه P واقع بر محور حلقه و به فاصله x از مرکز حلقه بدست آورید.



$$dq=\lambda\,dl \qquad \cos\alpha=\frac{x}{r}$$

$$dE=K\frac{dq}{r^2} \qquad r^2=x^2+R^2$$

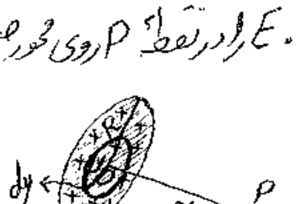
$$E_x=\int dE_x=\int dE\cos\alpha=\int_{\text{روی کل بار}}K\frac{dq}{r^2}\cos\alpha=\frac{K\cos\alpha}{r^2}\int dq=\frac{Kq\cos\alpha}{r^2}$$

$$=\boxed{E_x=K\frac{qx}{(x^2+R^2)^{3/2}}}$$

$$E_y=\int dE_y=\int\text{-----}=0$$

$$E_z=\int dE_z=\int\text{----}=0$$

مثال صفحه باردار: بار الکتریکی با چگالی سطحی ثابت σ روی یک صفحه دایره‌ای به شعاع R توزیع شده است. E را در نقطه P روی محور صفحه و به فاصله x از آن صفحه بدست آورید.



$$E_{\text{کل}}=\int dE=\int_0^R K\frac{\sigma 2\pi y\,dy\,x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \qquad \cos\alpha=\frac{x}{r}$$

بار حلقه $=\sigma 2\pi y\,dy$

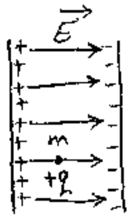
$$E_{\text{کل}}=K\sigma 2\pi x\int_0^R\frac{y\,dy}{(y^2+x^2)^{3/2}}=\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{\sqrt{y^2+x^2}}\right]_0^R=\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{\sqrt{R^2+x^2}}+\frac{1}{x}\right]$$

$$\boxed{E_{\text{کل}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right]}$$

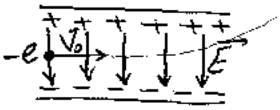
$$\text{for } x\ll R:\ E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

بررسی حرکت یک ذرهٔ باردار در یک میدان الکتریکی (خارجی):

$$\vec{F}=\vec{E}q=m\vec{a} \Rightarrow \vec{a}=\vec{E}q/m \Rightarrow \vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow V=\int \vec{a}\,dt$$



$$\begin{cases} V=at=\dfrac{q\vec{E}}{m}t \\ x=\dfrac{1}{2}at^2=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\vec{E}q}{m}t^2 \end{cases}$$



$q=-e$

$$\vec{F}=e\vec{E}=ma \Rightarrow a_y=\frac{eE}{m} \Rightarrow V=a_yt=eE/m\,t$$

$$x=V_0t \Rightarrow y=\frac{1}{2}a_yt^2 \Rightarrow y=\frac{1}{2}\times\frac{eE}{m}t^2 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}\times\frac{eE}{m}\times\frac{x^2}{V_0^2}}$$

مسئله 86 فصل 18 کتاب هالیدی ویرایش هشتم:

$$\vec{F}=\vec{E}q$$

به سمت پایین $F=eE=ma \Rightarrow a_y=\dfrac{eE}{m}$

$$\begin{matrix} V_{0x}=V_0\cos\theta \\ V_{0y}=V_0\sin\theta \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \begin{matrix} x=V_0\cos\theta\, t \\ y=V_0\sin\theta\, t-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{eE}{m}t^2=\dfrac{V_0\sin\theta . x}{V_0\cos\theta}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{eE}{m}\times\dfrac{x^2}{V_0^2\cos^2\theta} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} t=\dfrac{V_0\sin\theta}{\frac{eE}{m}} \\ V_y=V_0\sin\theta-\dfrac{eE}{m}t \end{cases}$$

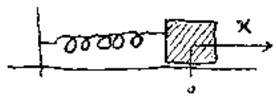
$$\star\ y=x\tan\theta-\frac{eE\,x^2}{2mV_0^2\cos^2\theta}$$

مربوط به فیزیک 1

حرکت هماهنگ ساده:

$$F=-Kx \Rightarrow ma=-Kx \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2}=-Kx \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{-K}{m}x$$

$$x=A\sin\omega t\ ,\ \omega^2=\frac{K}{m} \Rightarrow x=A\sin\sqrt{\frac{K}{m}}\,t$$



مسئله 76 فصل 18 هالیدی: برای میدان حلقه در یک نقطهٔ P روی محور بدست آورید:

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{qx}{(x^2+R^2)^{3/2}} \xrightarrow{\text{for } x\ll R} E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{qx}{R^3}$$

ذره -e در امتداد محور عمود بر مرکز یک حلقه باردار به شعاع R با x<<R مقید شده است. نشان دهید نیروی الکترو استاتیکی، الکترون را با بسامد W نوسان می دهد.

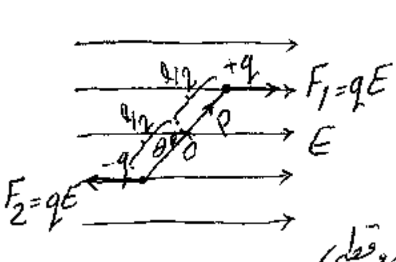
$$F=-e\vec{E}=\frac{-eqx}{4\pi\varepsilon_0R^3}$$

مثل حرکت هماهنگ ساده

$$\omega=\sqrt{\frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 mR^3}}$$

*حرکت یک دوقطبی الکتریکی در یک میدان الکتریکی (خارجی یکنواخت):

مثال: مطابق شکل یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور $P=ql$ به گونه‌ای در میدان خارجی یکنواخت E وارد شده که بردار E با P زاویهٔ θ می سازد. حرکت آن را بررسی کنید.

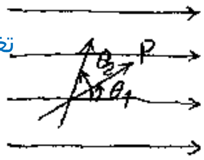


وارد بر دوقطبی $\vec{F}_{کل}=\vec{F}_1+\vec{F}_2=0$

$$\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F} \Rightarrow \begin{cases}\tau_1=(\frac{l}{2})(qE)\sin\theta \\ \tau_2=(\frac{l}{2})(qE)\sin\theta\end{cases} \Rightarrow \tau=\tau_1+\tau_2=qlE\sin\theta=PE\sin\theta$$

گشتاور نیرو $\vec{\tau}=\vec{P}\times\vec{E}$

کار انجام شده توسط میدان



تغییر تتا2 به تتا یک

$$W=\int dW=\int \tau d\theta=\int PE\sin\theta d\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2} PE\sin\theta d\theta=PE\left[-\cos\theta\right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$\Delta U=W=-PE\left[\cos\theta_2-\cos\theta_1\right]$$ تغییر انرژی پتانسیل

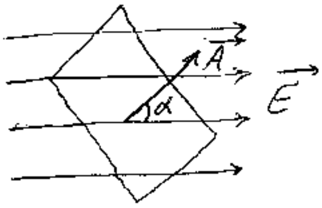
$$\text{if } \theta_1=\frac{\pi}{2},\ \theta_2=\theta \Longrightarrow \Delta U=W=-PE\cos\theta=-\vec{P}\cdot\vec{E}$$

فصل 25 (کتاب هودسون)

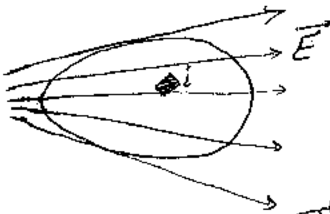
«قانون گاوس»

شار (فلوی) الکتریکی: Electeric flux

$$\star\ \vec{\varphi}=\vec{E}\cdot\vec{A} \Rightarrow \varphi=E.A\cos\alpha$$



$$\begin{cases}\text{for } \alpha=0 \Rightarrow +\varphi_{max} \\ \text{for } \alpha=\pi/2 \Rightarrow \varphi=0 \\ \text{for } \alpha=\pi \Rightarrow -\varphi_{max}\end{cases}$$

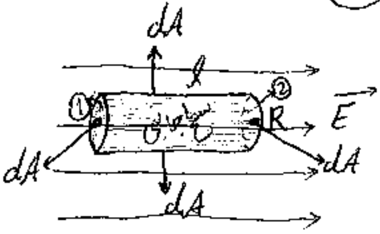


$$\Delta\varphi_i=\vec{E_i}\cdot\Delta\vec{A_i}$$

$$\varphi=\Sigma\Delta\varphi_i=\lim_{\Delta A\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{E_i}\,\Delta\vec{A_i}$$

$$\star\ \varphi=\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}$$ روی سطح مورد نظر $\Rightarrow$ شار الکتریکی روی سطح بسته

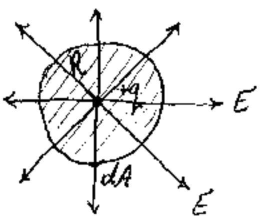
مثال: در شکل زیر شار عبوری میدان E را از سطح بسته استوانه ای شکل نشان داده شده به دست آورید.



$$\varphi=\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=\underbrace{\int\vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\text{قاعده 1}}+\underbrace{\int\vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\text{قاعده 2}}+\underbrace{\int\vec{E}\,d\vec{A}}_{\text{سطح جانبی}}=\int EdA\cos\pi+\int EdA\cos 0+\int EdA\cos\frac{\pi}{2}$$

$$=-E(\pi R^2)+E(\pi R^2)+0=0$$

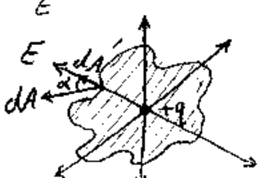
مثال: بار نقطه ای $+q$ را در مرکز یک سطح بسته کروی شکل به شعاع R در نظر بگیرید و شار عبوری میدان E را از این سطح بسته کروی شکل حساب کنید.



$$\varphi=\oint_{\text{کره}} E.dA=\oint EdA\cos 0=\oint k\frac{q}{R^2}dA=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{q}{R^2}\overbrace{\oint dA}^{4\pi R^2}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\varphi=\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

اگر سطح کروی نباشد هم به همان نتیجه فوق می رسیم.



$$\varphi_E=\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}$$

فیزیک 2 :

چون متناسب با خطوط گذرنده از سطح است با سطح کره فرقی ندارد

$\oint E_2 \cdot dA = q_2/\varepsilon_0$

$\vdots$

$\oint (E_1+E_2+\dots+E_n)\cdot dA = \frac{q_1+q_2+\dots+q_n}{\varepsilon_0}$

جمع جبری بارهائی که توسط سطح بسته‌ی مفروض احاطه شده‌اند.

قانون گاوس

$\star \oint E \cdot dA = \frac{q_{net}}{\varepsilon_0}$

$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{net}$

جمع جبری بارهائی که داخل سطح بسته‌ی مفروض واقع شده‌اند.

رساناها و قانون گاوس: با استفاده از قانون گاوس می‌توان نشان داد در یک رسانای با بار خالص غیرصفر بارهای داده شده در حالت تعادل الکترواستاتیکی روی سطح خارجی جسم قرار می‌گیرند. 1

جسم رسانای توپر

جسم بدون بار

2- میدان همیشه در داخل صفر است
3- میدان درست بیرون از سطح، عمود بر سطح است و بزرگی آن $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ است که σ چگالی بار روی سطح است
4- اگر شکل نامنظم باشدچگالی بار، جایی که شعاع انحنای کوچکتری دارد حداکثر است.

تنها در موارد تقارن می‌توان از قانون گاوس برای محاسبه‌ی میدان استفاده کرد.

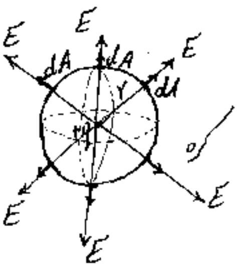
این موارد را می‌توان به سه دسته‌ی کلی تقسیم کرد:

1) در موارد تقارن کروی *

2) در موارد تقارن استوانه‌ای

3) در مواردی که بار روی صفحات بزرگ رسانا و نارسانا توزیع شده باشد.

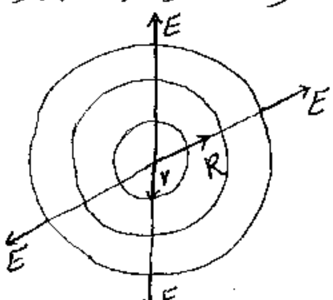
مثال* 1-1 : بار نقطه‌ای q+ مفروض است. با استفاده از قانون گاوس $\vec{E}$ را در فاصله‌ی r از این بار بدست آورید.



$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{in} \Rightarrow \varepsilon_0 \oint E\,dA\cos 0 = q \Rightarrow \varepsilon_0 E \int dA = q$$

$$\varepsilon_0 E . 4\pi r^2 = q \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{q}{r^2}$$

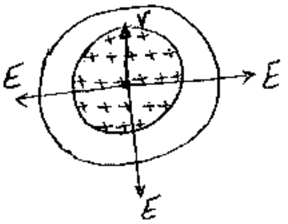
مثال* 1-2 : بار کل q+ بطور یکنواخت روی سطح یک پوسته‌ی کروی به شعاع R توزیع شده است. فاصله‌ی هر نقطه‌ی دلخواه را تا مرکز کره r بگیرید و E را برای نواحی r>R و r<R بدست آورید.



$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{in}$$

$$\varepsilon_0 \oint E\,dA\cos 0 = q \Rightarrow \varepsilon_0 E \oint dA = q \Rightarrow \varepsilon_0 E\, 4\pi r^2 = q$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{q}{r^2} \quad ; r>R \qquad\qquad R>r \Rightarrow E=0$$



مثال 1-3 : بار کل q+ به طور یکنواخت در سراسر حجم یک کرهٔ نارسانا به شعاع R توزیع شده است.
E را در نقاط r<R ، r=R ، r>R بدست آورید.

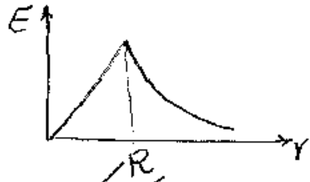
*for: r>R

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{in} \Rightarrow \varepsilon_0 E\, 4\pi r^2 = q \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{q}{r^2} \qquad r>R \text{ یا } E=\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

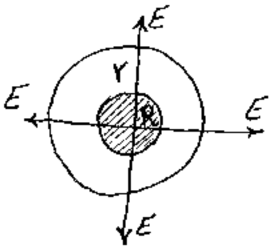
$$dq = \rho\, dv \Rightarrow q = \int \rho\, dv \xrightarrow[\rho\ cte]{if} q = \rho V = \rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) \Rightarrow \rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

*for r<R $\quad \varepsilon_0 \int \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{in} \Rightarrow \varepsilon_0 E\, 4\pi r^2 = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = \frac{q r}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \qquad r<R$

*for r=R $\quad E = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$



مثال 1-4 : بار الکتریکی با چگالی حجمی متغیر $\rho = Br^2$ در سراسر حجم یک کرهٔ نارسانای به شعاع R توزیع شده است. E را در نقاط r<R ، r=R و r>R بدست آورید.



* for r>R

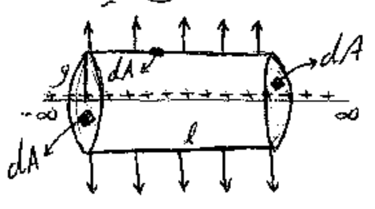
$$\Rightarrow \varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{in} \Rightarrow \varepsilon_0 E\, 4\pi r^2 = \int \rho\, dv = \int_0^R Br^2 \cdot 4\pi r^2 dr$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 E\, 4\pi r^2 = \frac{4\pi B R^5}{5} \Rightarrow E = \frac{BR^5}{5\varepsilon_0 r^2} \quad : r>R$$

* for r<R $\Rightarrow \varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{in} \Rightarrow \varepsilon_0 E\, 4\pi r^2 = \int \rho\, dv = \int_0^r Br^2 4\pi r^2 dr \Rightarrow E = \frac{Br^3}{5\varepsilon_0} \quad : r<R$

* for r=R $\Rightarrow E = \frac{BR^3}{5\varepsilon_0}$

مثال 2-1 : (مثالهایی با تقارن استوانه‌ای) یک خط بار بینهایت دارای بار با چگالی طولی ثابت λ می‌باشد، E را در فاصلهٔ y از این خط بدست آورید.



$$\varepsilon_0\left[\cancel{\int_{\text{قاعده}} \vec{E}\cdot d\vec{A}} + \cancel{\int_{\text{قاعده}} \vec{E}\cdot d\vec{A}} + \int_{\text{سطح جانبی}} \vec{E}\cdot d\vec{A}\right] = \lambda l$$

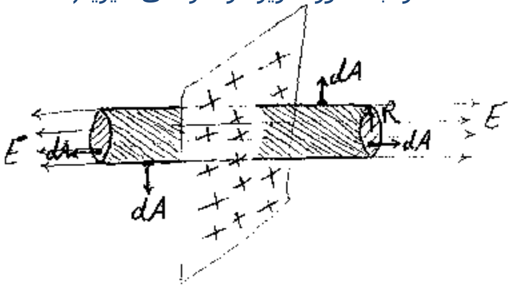
$$\Rightarrow \int_{\text{سطح جانبی}} E\, dA \cos 0 = E\int dA \Rightarrow \varepsilon_0 E\,[2\pi y l] = \lambda l \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}}$$

فیزیک:

مسائل حل نشده: فصل 25 هودسون ← 5 - 15 - 20

فصل 19 هالیدی ← 15 - 36 - 37 - 51

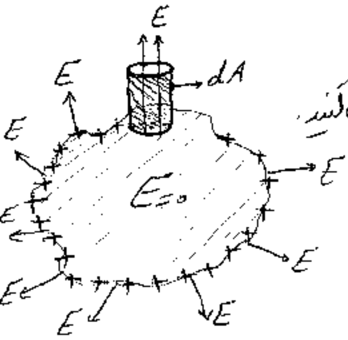
برای محاسبه، یک استوانه فرضی را به صورت زیر درنظر می گیریم



مثال 3-1: بار الکتریکی با چگالی سطحی ثابت σ روی سطح یک صفحهٔ نازک و نارسانای با ابعاد بسیار بزرگ توزیع شده است. E را در یک نقطه مقابل این صفحه بدست آورید.

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{in} \Rightarrow \varepsilon_0 \Big[\underbrace{\int \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\text{قاعده}} + \underbrace{\int \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\text{قاعده}} + \underbrace{\int \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\text{سطح جانبی}} \Big] = \sigma A$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 E.A + \varepsilon_0 EA + 0 = \sigma A \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

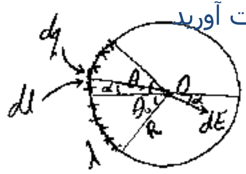


مثال 3-2: بار الکتریکی روی سطح یک رسانا توزیع شده است. E را در یک نقطه نزدیک به سطح رسانا حساب کنید. فرض کنید چگالی سطحی بار در آن ناحیه σ است.

$$\varepsilon_0 \oint E\cdot dA = q_{in}$$

$$\varepsilon_0 \Big[\underbrace{\int \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\text{قاعده}} + \underbrace{\int \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\text{قاعده}} + \underbrace{\int \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\text{سطح جانبی}} \Big] = \sigma A \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

مسئله 20 فصل 24 هودرون: یک بار یکنواخت مثبت با چگالی λ بر واحد طول روی یک نارسانا به صورت شکل است، میدان را در مرکز منحنی به دست آورید

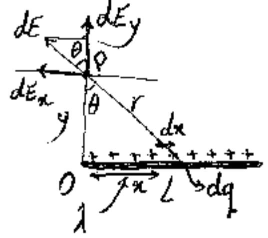


$$dE = K\frac{dq}{R^2} \qquad dq = \lambda dl \qquad dl = R d\alpha$$

$$E_x = \int dE_x = \int dE\cos\alpha = \int k\frac{dq}{R^2}\cos\alpha \;/\; E_y = \int dE_y = \int dE\sin\alpha = \int k\frac{dq}{R^2}\sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow E_x = \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} K\frac{\lambda R d\alpha}{R^2}\cos\alpha = \frac{k\lambda}{R}\int_{-\theta_0}^{+\theta_0}\cos\alpha\, d\alpha = \frac{k\lambda}{R}\Big[\sin\theta\Big]_{-\theta_0}^{+\theta_0} = \frac{K\lambda}{R}\Big[\sin\theta_0 - \sin(-\theta_0)\Big] = \frac{2k\lambda}{R}\sin\theta_0$$

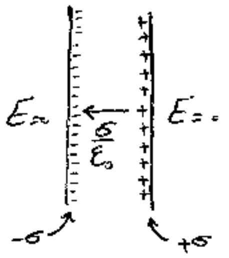
مسئله 35 فصل 24 هودرون: مؤلفه های x و y میدان را در نقطه p بدست آورید



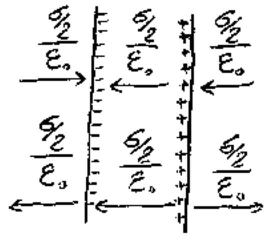
$$dE = k\frac{dq}{r^2} \qquad \sin\theta = \frac{x}{r}, \; \cos\theta = \frac{y}{r}$$

$$\begin{cases} E_x = \int dE_x = -\int dE\sin\theta = -\int k\frac{\lambda dx}{r^2}\sin\theta = -k\lambda\int_0^l \frac{x\,dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = -k\lambda\Big[\frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big]_0^l = -k\lambda\Big[\frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{l^2+y^2}}\Big] \\ E_y = \int dE_y = \int dE\cos\theta = \int k\frac{\lambda dx}{r^2}\cos\theta = k\lambda y\int_0^l \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = k\lambda y\Big[\frac{1}{y^2}\times\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big]_0^l = \frac{k\lambda}{y}\Big[\frac{l}{\sqrt{l^2+y^2}}\Big] \end{cases}$$

مسئله 37 فصل 19 هالیدی:



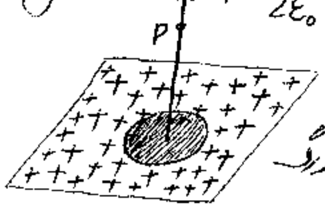
صفحات نازک و رسانای با ابعاد بسیار بزرگ



مسئله 36 فصل 19 هالیدی: σچگالی بار، مبدأ محور محور z بر مرکز حفره است.

فرض می کنیم یک صفحه نا محدود با چگالی بار σ و یک دایره با چگالی بار σ− داریم

$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ مربوط به صفحه کامل



صفحه نازک و نارسانای با ابعاد بزرگ

$$\vec{E}_{کل} = \vec{E}_1 - \vec{E}_2$$

$\vec{E}_1$ مربوط به صفحه کامل، $\vec{E}_2$ مربوط به صفحه دایره ای شکل

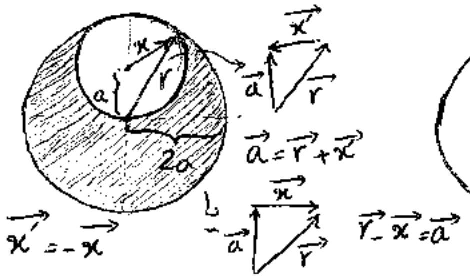
$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\hat{k} + \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\hat{k}$$

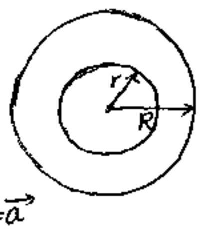
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right]_0^z \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma Z}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{\sigma Z}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}$$

صفر تا z (فاصله نقطه تا محور)

مسئله 20 فصل 25 هودرون:

کره نارسانا با شعاع 2a که بار یکنواخت ρ روی آن وجود دارد یک کره به شعاع a از داخل آن در آورده شده است. نشان دهید که $E_x = 0, E_y = \frac{\rho a}{3\varepsilon_0}$ در درون حفره ثابت است.





یادآوری:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{in}$$

$$\varepsilon_0 E \cdot 4\pi r^2 = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

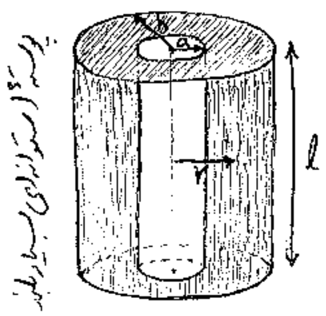
برای نقطه فرضی وسط حفره میدان ناشی از بار مثبت کره و بار منفی کره کوچک را با هم جمع می کنیم.

$$\vec{E}_{کل} = \vec{E}_{کامل} - \vec{E}_{حفره} \Rightarrow \vec{E}_{کل} = \frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho\vec{x}}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r} - \vec{x}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$$

مسئله 15 فصل 25 هودرون:

الف) k ثابتی است در واحد si ، واحد آن را بیابید

در سؤال زیر چگالی یکنواخت نیست و با شعاع نسبت عکس دارد.



$$\rho = \frac{k}{r}$$

الف) $k = r\rho = [l] \times \frac{C}{l^3} = \frac{C}{l^2} = \frac{بار}{سطح}$

$$V = \pi r^2 l$$

$$dV = 2\pi r l\, dr$$

$$dq = \rho\, dV \Rightarrow q = \int \rho\, dV$$

ب) کل بار Q در طول L روی استوانه

$$q = \int_a^b \frac{k}{r} \cdot 2\pi r\, dr\, l = 2\pi k(b-a)l \Rightarrow \boxed{q = 2\pi k(b-a)l}$$

کل بار موجود در طول l این پوسته

for $a<r<b$: $\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{in} \Rightarrow \varepsilon_0 E\, 2\pi r l = \int \rho\, dV = \int_a^r \frac{k}{r}\cdot 2\pi r l\, dr \Rightarrow E = \frac{k(r-a)}{\varepsilon_0 r}$ ✓

for $r>b$: $\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{in} \Rightarrow \varepsilon_0 E\, 2\pi r l = \int_a^b \rho\, dV = 2\pi k(b-a)l \Rightarrow E = \frac{k(b-a)}{\varepsilon_0 r}$ ✓

ج) با استفاده از قانون گوس میدان الکتریکی E را در نقطه ی r به دست آورید. (بین a و b)

فصل 26 : «پتانسیل الکتریکی»

* بنابه تعریف، اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه A و B واقع در یک میدان الکتریکی برابر است با مقدار کاری که یک عامل خارجی (علیه نیروی الکترواستاتیک) انجام می‌دهد تا واحد بار مثبت را بدون شتاب از نقطه اول (مثلاً A) به نقطه دوم (مثلاً B) ببرد.

بنابراین اگر برای بردن بار آزمون مثبت q از نقطه A به B مقدار کار لازم W_{AB} باشد، می‌توان نوشت، کمیتی نرده‌ای:

$$\star\ V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0}$$

* اغلب نقطه A (سطح پتانسیل) را در بینهایت دور انتخاب و پتانسیل آن را صفر می‌گیرند. در این صورت می‌توان از پتانسیل نقطه‌ای مانند B صحبت کرد و نوشت:

$$V_B - 0 = \frac{W_{\infty B}}{q_0} \Rightarrow V_B = \frac{W_{\infty B}}{q_0}$$

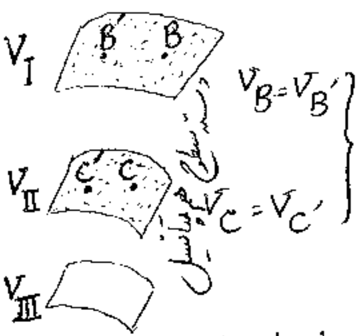
$$\text{if } W_{AB} > 0 \Longrightarrow V_B - V_A > 0 \Longrightarrow V_B > V_A$$

$$\text{if } W_{AB} = 0 \Longrightarrow V_B - V_A = 0 \Longrightarrow V_B = V_A$$

$$\text{if } W_{AB} < 0 \Longrightarrow V_B - V_A < 0 \Longrightarrow V_B < V_A$$

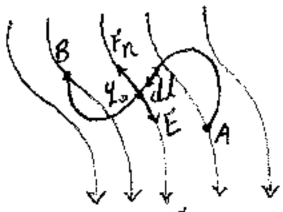
* سطوح هم پتانسیل: یک سطح هم پتانسیل مکان هندسی نقاطی است که دارای پتانسیل یکسان هستند.

* خطوط میدان همیشه بر سطوح هم پتانسیل عمود هستند و جهت میدان در جهتی است که پتانسیل کاهش می‌یابد.



$V_B = V_{B'}$, $V_C = V_{C'}$ $\Big\}$ $V_B - V_C = V_I - V_{II}$

رابطه بین E و اختلاف پتانسیل:



$$\begin{cases} \vec{F}_E = q_0 \vec{E} \\ \vec{F}_M = -q_0 \vec{E} \end{cases}$$

$$\star\ W_{AB} = \int_A^B dW_{AB} = \int_A^B \vec{F}_M \cdot \vec{dl} = \int_A^B -q_0 \vec{E} \cdot \vec{dl} = -q_0 \int \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

کار انجام شده برای جابجا کردن بار از نقطه A به B به اختلاف پتانسیل دو نقطه بستگی دارد.

برای جابجایی بار از بینهایت به یک نقطه غیر بینهایت کار میدان باید منفی باشد

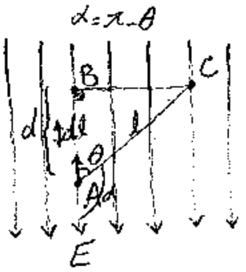
$$\star\ \frac{W_{AB}}{q_0} = -\int_A^B \vec{E} \cdot \underbrace{\vec{dl}}_{\text{عنصری از طول}} = V_B - V_A$$

مثال: در شکل زیر دو نقطه A و B که فاصله‌ی آنها از یکدیگر d است در یک میدان یکنواخت $\vec{E}$ واقع شده‌اند.

الف) مطلوبست $V_B - V_A$

ب) نقطه C را مطابق شکل در نظر بگیرید و $V_C - V_A$ را نیز حساب کنید.

ج) $V_B - V_C$ چقدر است؟



الف)

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

$$V_B - V_A = -\int_A^B E\,dl\cos\pi$$

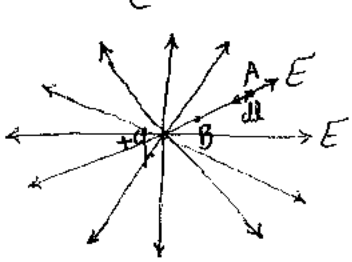
$$V_B - V_A = +\int_A^B E\,dl = E\int_A^B dl = Ed \Rightarrow V = Ed \Rightarrow E = \frac{V}{d}$$

ب)

$$V_C - V_A = -\int_A^C \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\int_A^C E\,dl\cos\alpha = +\int_A^C E\,dl\cos\theta = E\cos\theta\int_A^C dl = El\cos\theta = Ed \Rightarrow V_C - V_A = Ed$$

ج) $V_B - V_C = -\int_C^B \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\int E\,dl\cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad \Rightarrow V_B - V_C = 0$

مثال: بار نقطه‌ای $+q$ مفروض است. مطابق شکل دو نقطهٔ A و B را که به ترتیب در فواصل r_A و r_B از بار نقطه‌ای واقع شده‌اند در نظر بگیرید و $V_B - V_A$ را حساب کنید.



$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\int E\,dl\cos\pi = \int_A^B E\,dl = -\int_A^B E\,dr = -\int_{r_A}^{r_B} k\frac{q}{r^2}dr = -kq\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2}$$

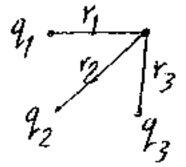
$$V_B - V_A = -kq\left[\frac{-1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = -kq\left[\frac{-1}{r_B}+\frac{1}{r_A}\right] \Rightarrow V_B - V_A = kq\left[\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right]$$

اگر A را در بینهایت دور بگیریم (یعنی $r_A=\infty$ باشد) $V_A=0$ خواهیم داشت،

$$V_B - 0 = kq\left[\frac{1}{r_B}-\frac{1}{\infty}\right] = kq/r_B$$

*برای چند بار نقطه‌ای جدا از هم داریم،

می خواهیم پتانسیل یک نقطه را در اثر هر سه بار به دست آوریم



$V_1 = k\frac{q_1}{r_1}$

$V_2 = k\frac{q_2}{r_2}$

⋮

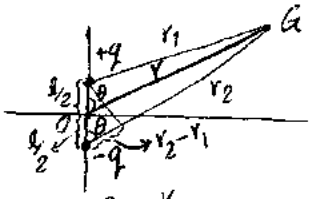
$\star V = V_1 + V_2 + V_3$

$$\begin{cases} V = \sum V_i \\ V = k\sum \frac{q_i}{r_i} \end{cases}$$

*برای یک توزیع پیوسته بار داریم،

$\star dV = k\frac{dq}{r}$, $\star V = \int dV$

مثال ۱: در دوقطبی شکل زیر $p=ql$ است. پتانسیل الکتریکی را در نقطهٔ $G(r,\theta)$ و یا $[G(x,y)]$ (نسبت به مرجع بینهایت) برای حالتی که $r>>l$ باشد به دست آورید.



$\cos\theta = \frac{y}{r}$

$$V_G = k\frac{+q}{r_1} + k\frac{-q}{r_2} = kq\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

$$V_G = kq\left(\frac{r_2-r_1}{r_1r_2}\right) \longrightarrow \text{for } r>>l:\ r_2-r_1 = l\cos\theta \quad , r_1r_2 \approx r^2$$

$$\Rightarrow V_G = k\frac{ql\cos\theta}{r^2} \xrightarrow{P=ql} V_G(r,\theta) = k\frac{P\cos\theta}{r^2} \Rightarrow \text{for } \theta=0:\ V_G = k\frac{P}{r^2}$$

برای یک دوقطبی

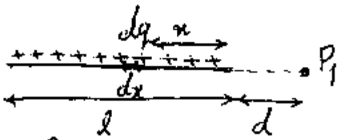
یا برحسب (x,y): $V_G(x,y) = k\frac{Py}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

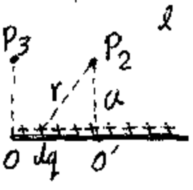
مثال ۲: در شکل زیر مطلوب است، پتانسیل الکتریکی،

الف) در نقطهٔ P_1

ب) در نقطهٔ P_2 (وسط خط بار)

ج) در نقطهٔ P_3





$dq = \lambda dx$

$$V_{P_1} = \int dV = \int k\frac{dq}{(x+d)} = \int_0^l k\frac{\lambda dx}{(x+d)} = k\lambda\int_0^l\frac{dx}{(x+d)}$$

$$V_{P_1} = k\lambda\left[\ln(x+d)\right]_0^l = k\lambda\left[\ln\frac{l+d}{d}\right]$$

$$V_{P_2} = \int dV = \int k\frac{dq}{r} = \int_{-l/2}^{+l/2}\frac{k\lambda dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = k\lambda\left[\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\right]_{-l/2}^{+l/2}$$

مقدار این انتگرال درست است و از پیوست B کتاب هالیدی آمده است

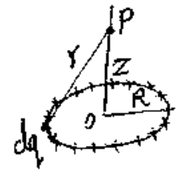
$$V_{P_3} = \int dV = \int_0^l k\frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = k\lambda\left[\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\right]_0^l$$

محاسبه پتانسیل الکتریکی در نقطه p در فاصله z از محور حلقه باردار با توزیع یکنواخت

فیزیک 2 : به دست آوردن میدان از پتانسیل:

$$v_B - v_A = -\int_A^B E\,ds \xrightarrow{\text{اگر فقط } E_z \text{ باشد}} E.ds = E_z.dz \Rightarrow E_z = -\frac{dv}{dz}$$

مثال حلقه‌ی باردار:



$$V=\int dV = \int k\frac{dq}{r} = \frac{k}{r}\int dq = \frac{kq}{r} \Rightarrow V = k\frac{q}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

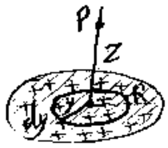
$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -kq\left[\frac{\frac{-2z}{2\sqrt{R^2+z^2}}}{R^2+z^2}\right] = kq\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\star\ \vec E = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec i - \frac{\partial V}{\partial y}\vec j - \frac{\partial V}{\partial z}\vec k$$

مثال صفحه‌ی باردار: در صفحه‌ی دایره‌ای شکل زیر به شعاع R بار با چگالی سطحی ثابت σ توزیع شده. V را در نقطه‌ی P واقع بر محور صفحه و به فاصله z از مرکز صفحه به دست آورید.

با استفاده از مسئله قبل از پتانسیل ناشی از هر حلقه کوچک استفاده می کنیم.

بار حلقه $= 2\pi y\,dy\,\sigma$



پتانسیل کل $= \int$ پتانسیل حاصل از حلقه $= \int dV = \int_0^R k\frac{2\pi y\,dy\,\sigma}{\sqrt{z^2+y^2}} \Rightarrow V = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{y\,dy}{\sqrt{z^2+y^2}}$

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2+y^2}\right]_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2+R^2} - z\right]$$

★ انرژی پتانسیل الکتریکی: یک دستگاه تشکل از ذرات باردار برابر است با کاری که انجام شده تا این ذرات از بی‌نهایت دور به محل فعلی‌شان آورده شده‌اند.

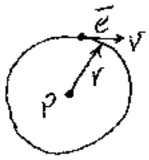
بنابراین برای یک دستگاه متشکل از دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 که به فاصله‌ی r از یکدیگر قرار گرفته انرژی پتانسیل به صورت زیر به دست می‌آید.

در حالت کلی: $W_{ij} = k\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$

$$\star\ W_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r}$$

انرژی پتانسیل بین الکترون و هسته

برای یک اتم هیدروژن:



اتم H

$e = 1{,}6\times10^{-19}$

$r = 0{,}53\,A^\circ$

$$\left.\begin{aligned} E_p &= W_p = -k\frac{e^2}{r} \\ E_k &= \frac{1}{2}mv^2 \end{aligned}\right\} E_k = k\frac{e^2}{2r}$$

انرژی کل $= E_p + E_k \Rightarrow$ انرژی کل $= -k\frac{e^2}{r} + k\frac{e^2}{2r} \Rightarrow$ انرژی کل $= -k\frac{e^2}{2r} = -13{,}6\ eV$

★ به دست آوردن E از V: در به دست آوردن V از E (وقتی مرجع در بی‌نهایت باشد) دانستیم

$$V_p = -\int_\infty^p \vec E\cdot d\vec l$$

در اصل چنین می‌توان نوشت:

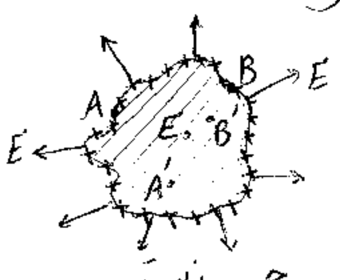
$$dV = -\vec E\cdot d\vec l = -E\,dl\cos\theta$$

$$E\cos\theta = -\frac{dV}{dl} \Rightarrow E_l = -\frac{dV}{dl}$$

$$E_x = \frac{-dV}{dx},\ E_y = \frac{-dV}{dy},\ E_z = \frac{-dV}{dz} \Longrightarrow E_x = \frac{-\partial V}{\partial x},\ E_y = \frac{-\partial V}{\partial y},\ E_z = \frac{-\partial V}{\partial z}$$

★ رساناها و پتانسیل:

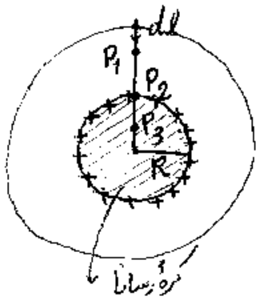
در حالت تعادل الکترواستاتیک یک جسم رسانا یک سطح هم پتانسیل است.



جسم رسانای توپر

$$V_{B'} = V_{A'} = V_A = V_B$$

مثال: یک کره‌ی رسانای توپر به شعاع R دارای بار کل q است که به طور یکنواخت روی سطح آن پخش شده است. پتانسیل الکتریکی در نقاط $r>R$ ، $r=R$ و $r<R$ (نسبت به مرجع) به دست آورید. r فاصله‌ی هر نقطه‌ی دلخواه تا مرکز کره است.



$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{in}$$

$$\varepsilon_0 E \cdot 4\pi r^2 = q$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q}{r^2}$$

$$V_{P_1} = -\int_{\infty}^{P_1} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{\infty}^{P_1} E\,dl\cos\pi = \int_{\infty}^{P_1} E\,dl = -\int_{\infty}^{P_1} E\,dr = -\int_{\infty}^{r} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{q}{r^2}\,dr$$

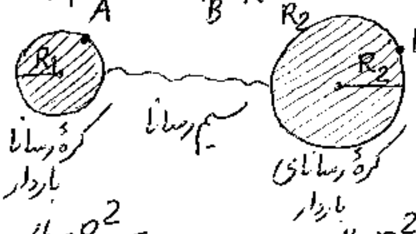
$$V_{P_1} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{r}\right]_{\infty}^{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{q}{r} = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r}} \quad r>R$$

$$\star\ V_{P_2} = V_{P_3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{R}$$

اگر دو جسم رسانا را با یک سیم رسانا به هم وصل کنیم

★ به طریق زیر می‌توان نشان داد در یک جسم رسانا چگالی سطحی بار با شعاع انحنا نسبت عکس دارد.

$V_A = k\frac{q_1}{R_1}$ $\qquad$ $V_B = k\frac{q_2}{R_2}$



$q_1 = 4\pi R_1^2\sigma_1$ $\qquad$ $q_2 = 4\pi R_2^2\sigma_2$

از مثال قبل

اما $V_A = V_B \Rightarrow k\frac{q_1}{R_1} = k\frac{q_2}{R_2} \Rightarrow \frac{4\pi R_1^2\sigma_1}{R_1} = \frac{4\pi R_2^2\sigma_2}{R_2}$

$$\Rightarrow R_1\sigma_1 = R_2\sigma_2 \qquad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

تعریف الکترون ولت: کار انجام شده برای انتقال یک الکترون از یک صفحه به صفحه دیگر با اختلاف پتانسیل یک ولت، یک الکترون ولت است.

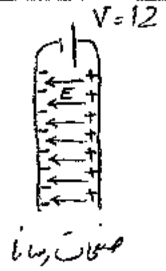
$\star W = qV \Longrightarrow W = 1{,}6\times10^{-19}\times 1 = 1{,}6\times10^{-19}$ ژ

$W = 1eV$

$\left\{ 1eV = 1{,}6\times10^{-19} \right.$ ژ

W: الکترون ولت (ژ)
q: بار الکترون (C)
V: ولت (V)

مسئله 1 فصل 26 هودرلون:



یک باطری 12 ولت به دو صفحه موازی بزرگ متصل شده اند فاصله صفحات 4mm است.

الف) بزرگی میدان الکتریکی را به دست آورید.

ب) یک پروتن از صفحه مثبت آزاد و به سمت صفحه منفی شتاب می گیرد. تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی پروتن در طول حرکت چقدر است؟

$$V=Ed \Rightarrow E=\frac{V}{d}$$

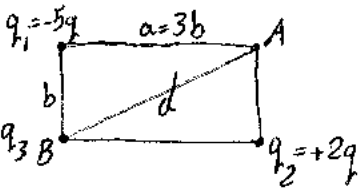
$$\vec{F}_e=q\vec{E}=e\vec{E}=-e\vec{E} \Rightarrow F_e=eE=m_e a \Rightarrow a=\frac{eE}{m}$$

الف) $$v_B-v_A=-\int_0^d E\,dy=-E.d \Rightarrow |E|=\frac{|v_B-v_A|}{d}=\frac{12}{4}\times 10^{-3}=3000\,\frac{v}{m}$$

ب) $$\Delta u=q\Delta v=(1.6\times 10^{-19})(-12)=-12ev$$

مسئله 45 فصل 20 هالیدی:

در شکل سمت چپ مقادیر پتانسیل الکتریکی خواسته شده را بدست آورید



$b=5cm \quad , a=15cm \quad , q=1\mu c$

الف) $V_A=?$

ب) $V_B=?$

ج) چقدر کار لازم است که بار 3q از نقطه B به A برود؟

$$V_A=k\frac{-5q}{a}+k\frac{+2q}{b}=k\frac{-5q}{3b}+k\frac{2q}{b}=\frac{kq}{3b}$$

$$V_B=k\frac{-5q}{b}+k\frac{+2q}{3b}=\frac{-13}{3}k\frac{q}{b}$$

$q_3=3q \,/\, d=\sqrt{b^2+9b^2}$

$d=\sqrt{10}\,b$

$$V=(V_A-V_B) \Rightarrow W=q_3(V_A-V_B) \Rightarrow W=3q\left(\frac{kq}{3b}+\frac{13}{3}k\frac{q}{b}\right) \Rightarrow W=14k\frac{q^2}{b}$$

W: وقتی q_3 در B قرار دارد،

W': وقتی q_3 در A قرار دارد

$$W=W_{12}+W_{13}+W_{23}=k\frac{(-5q)(2q)}{b\sqrt{10}}+k\frac{(-5q)(3q)}{b}+k\frac{(3q)(2q)}{3b}$$

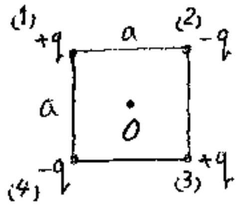
$$W'=k\frac{(-5q)(2q)}{b\sqrt{10}}+k\frac{(-5q)(3q)}{3b}+k\frac{(3q)(2q)}{b}$$

$$\Big\} \; W'-W=14k\frac{q^2}{b}$$

مسئله 41 فصل 20 هالیدی:

چقدر کار لازم است تا ترکیب و نظم روبرو شکل بگیرد؟

فرض می کنیم در ابتدا فضا خالی است و یکی یکی بارها را می آوریم و می گذاریم



$$W=W_{12}+W_{13}+W_{23}+W_{14}+W_{24}+W_{34}$$ ← طبق تعریفی که از اختلاف پتانسیل داشتیم

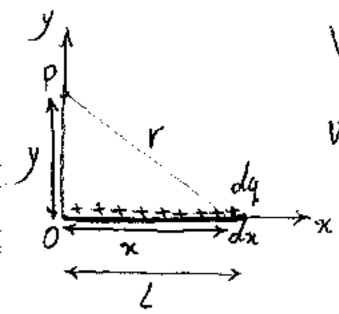
$$=k\frac{(q)(-q)}{a}+k\frac{(q)(q)}{\sqrt{2}a}+k\frac{(-q)(q)}{a}+k\frac{(q)(-q)}{a}+k\frac{(-q)(-q)}{\sqrt{2}a}+k\frac{(q)(-q)}{a}$$

$$=kq^2/a\left[-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-1-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right]=-2{,}6\,kq^2/a$$

? هرگاه بخواهیم یک بار مثبت q را از بی نهایت دور به نقطه O بیاوریم چقدر کار باید انجام دهیم؟

$$W=qV=q(V_o-V_\infty)=qV_o \Rightarrow V_o=0 \Rightarrow W=0$$

مسئله 15 فصل 26 هودرلون:

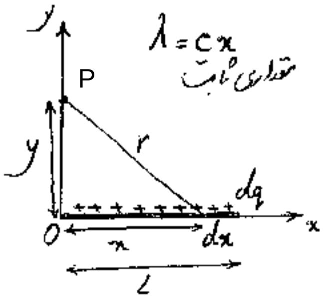


$V_p=?$

$$V=\int dv=\int k\frac{dq}{r} \Rightarrow V=\int_0^l \frac{k\lambda dx}{\sqrt{x^2+y^2}}=k\lambda\left[\ln[x+\sqrt{x^2+y^2}]\right]_0^l=k\lambda\left[\ln(l+\sqrt{y^2+l^2})-\ln y\right]$$

بار غیر یکنواخت روی میله نارسانای نازک توزیع شده است. پتانسیل نقطه o، نقطه P و اختلاف پتانسیل این دو نقطه را به دست آورید

مسئله 40 فصل 20 هالیدی:



$\lambda = cx$ مقدار ثابت

$$V = \int dV = \int k \frac{dq}{r}$$

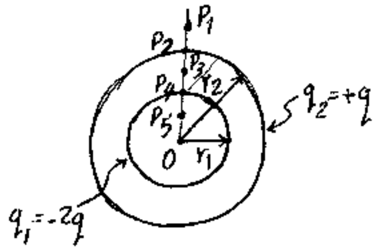
$$V = \int_0^l k \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = k \int_0^l \frac{cx\, dx}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow V_p = kc\left[\sqrt{x^2+y^2}\right]_0^l = kc\left[\sqrt{l^2+y^2} - y\right]$$

$$V_0 = kcl$$

$$V_p - V_0 = kc\left[\sqrt{l^2+y^2} - y\right] - kcl$$

در شکل زیر بار +q روی حلقه بیرونی و بار -2q روی حلقه داخلی به طور یکنواخت پخش شده است. E و V را برای پنج نقطه مشخص شده در شکل به دست آورید.

مسئله 13 فصل 26 هودسون:



$$r_2 = 5cm,\ r_1 = 30cm,\ q = 40\mu C$$

$$\begin{cases} q_1 = -2q \\ q_2 = q \end{cases} \qquad r > r_2,\ r_1 < r < r_2,\ r < r_1 \qquad V, E = ?$$

$$\text{for: } r > r_2 \Rightarrow \varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{in} \Rightarrow \varepsilon_0 E\, 4\pi r^2 = -q \Rightarrow E_{out} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q}{r^2} \quad : r > r_2$$

$$\text{for: } r_1 < r < r_2 \Rightarrow \varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{in} \Rightarrow \varepsilon_0 E . 4\pi r^2 = -2q \Rightarrow E_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{-2q}{r^2} \quad : r_1 < r < r_2$$

$$\text{for: } r < r_1 \Rightarrow \varepsilon_0 \oint \vec{E}\, d\vec{A} = q_{in} \Rightarrow \varepsilon_0 E . 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow E_{in} = 0 \quad : r < r_1$$

$$\text{for: } r > r_2 \Rightarrow V_{P_1} = -\int_\infty^{P_1} \vec{E}_{out}\cdot d\vec{l} = -\int_\infty^{P_1} E\, dl = +\int_\infty^{P_1} E\, dr = \int_\infty^{r} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{r}\right]_\infty^r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{-q}{r} = V_{P_1}$$

$$\text{for: } r = r_2 \Rightarrow V_{P_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{-q}{r_2}$$

تا بسیار نزدیک به نقطه P_2 میدان تغییری نمی کند. پس از فرمول قبلی استفاده می کنیم

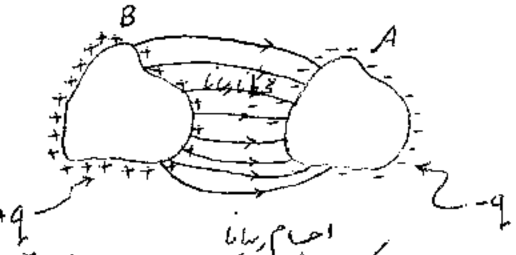
$$\text{for: } r_1 < r < r_2 \Rightarrow V_{P_3} = -\int_\infty^{P_3} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\left[\int_\infty^{P_2} \vec{E}_{out}\cdot d\vec{l} + \int_{P_2}^{P_3} \vec{E}_M \cdot d\vec{l}\right] = -\int_\infty^{P_2} \vec{E}_{out}\cdot d\vec{l} - \int_{P_2}^{P_3} \vec{E}_M \cdot d\vec{l} \quad \star$$

$$\Rightarrow V_{P_3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{-q}{r_2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{2q}{r_2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{2q}{r} \Rightarrow V_{P_3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q}{r_2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{2q}{r}$$

$$\star\ -\int_{P_2}^{P_3} \vec{E}_M \cdot d\vec{l} = \int_{r_2}^{r} E_M\, dr = \int_{r_2}^{r} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{2q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2q \left[\frac{-1}{r}\right]_{r_2}^{r} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{r} + \frac{1}{r_2}\right]$$

$$V_{P_5} = V_{P_4} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q}{r_2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{2q}{r_1} = V_0$$

فصل 27 کتاب فیزیک دانشگاهی هالیدی: «ظرفیت» یا «خازن»

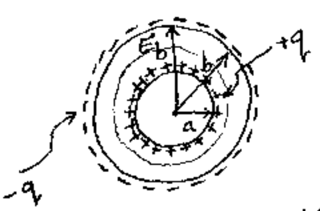


ظرفیت خازن $= C = \dfrac{q}{V} = \dfrac{\text{کولن}}{\text{ولت}} =$ فاراد (F)

$$\Rightarrow q = CV$$

هریک از این رساناها معادل یک قطب یا یک صفحه خازن است

مثال 1: در یک خازن کروی، مطابق شکل، شعاع قطب داخلی a و شعاع قطب بیرونی b است، ظرفیت این خازن را بدست آورید.



$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{in}$$

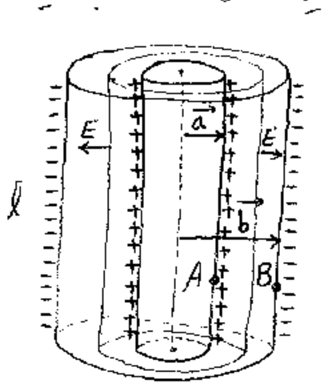
$$\varepsilon_0 E \cdot 4\pi r^2 = q \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \quad a<r<b$$

ظرفیت خازن کروی:

$$V = V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l} = +\int_B^A E\,dl = -\int_b^a E\,dr = -\int_b^a \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{q}{r^2}\,dr = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{r}\right]_b^a =$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) \Rightarrow V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{(b-a)}{ab} \Rightarrow C = \frac{q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$$

مثال 2: خازن استوانه‌ای یک استوانه‌ی رسانا به شعاع مقطع a و طول l توسط یک پوسته‌ی رسانای استوانه‌ای شکل به شعاع b و طول l به طور هم محور احاطه شده و یک خازن تشکیل می‌دهند. با فرض اینکه $b \ll l$ باشد، ظرفیت این خازن را حساب کنید.



$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{in}$$

$$\varepsilon_0 E \cdot 2\pi r l = q$$

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r l}, \quad a<r<b$$

$$V = V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_B^A E\,dl = -\int_b^a E\,dr$$

$$V = -\int_b^a \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l r}\,dr = \frac{-q}{2\pi\varepsilon_0 l}\left[\ln r\right]_b^a = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln \frac{b}{a}$$

$$* \; C = \frac{q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln \frac{b}{a}}$$

ظرفیت خازن استوانه‌ای:

مثال 3: در یک خازن مسطح، مساحت هر صفحه A و فاصله دو صفحه از یکدیگر d است. با فرض اینکه ابعاد هر صفحه نسبت به فاصله‌ی بین دو صفحه، بزرگ باشد ظرفیت این خازن را بدست آورید.

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q$$

$$\varepsilon_0 E A = q \Rightarrow E = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$$

$$V = V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{l} = +\int_b^a E\,dl = E\int_b^a dl = Ed \Rightarrow V = \frac{qd}{\varepsilon_0 A} \Rightarrow C = \frac{q}{V} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

ظرفیت خازن مسطح:

اثر جنس دی الکتریک (یا عایق) بین دو قطب بر ظرفیت یک خازن:

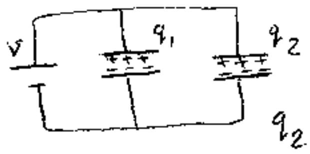
ماده	k
خلاء	1
هوا	1,0005
شیشه	4-6
پلاستیک	3
آب مقطر	~80

ضریب یا ثابت دی الکتریک ماده بین دو قطب

$$k=\frac{C_2}{C_1}=\frac{\frac{q_2}{V}}{\frac{q_1}{V}}=\frac{q_2}{q_1}$$

$$C_2=kC_1$$

$C_1=\frac{q_1}{V}$, $C_2=\frac{q_2}{V}$



$q_2>q_1$

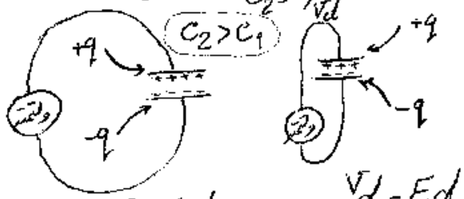
★ آزمایش الف) 1:

اگر ولتاژ همسانی را به دو خازن وصل کنیم بار متفاوتی روی آنها ذخیره می شود.

★ آزمایش الف) 2:

اگر بارهای همسان روی دو خازن با ظرفیت متفاوت داشته باشیم ولتاژ متفاوتی را خواهند داشت

$C_1=q/V_0$, $C_2=q/V_d$, $C_2>C_1$



$V_0=E_0d$, $V_d=Ed$, $V_d<V_0$

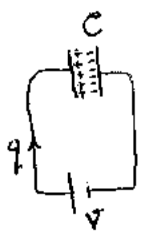
$$\frac{C_2}{C_1}=\frac{\frac{q}{V_d}}{\frac{q}{V_0}}=\frac{V_0}{V_d}=k \Rightarrow C_2=kC_1$$

$k>1$

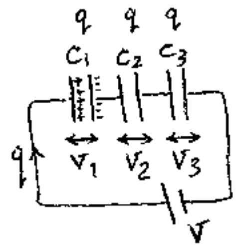
$$\frac{C_2}{C_1}=k=\frac{V_0}{V_d}=\frac{E_0d}{Ed}=\frac{E_0}{E}\Rightarrow E=\frac{E_0}{k}\Rightarrow E_0=kE$$

به هم بستن خازن ها و ظرفیت معادل:

الف) به صورت متوالی:



$q=CV$



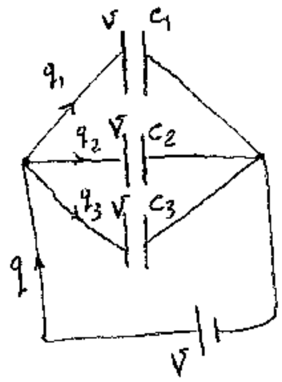
$$\begin{cases} q=C_1V_1 \\ q=C_2V_2 \\ q=C_3V_3 \end{cases}$$

$$V=V_1+V_2+V_3$$

$$\frac{q}{C}=\frac{q}{C_1}+\frac{q}{C_2}+\frac{q}{C_3}\Rightarrow \boxed{\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}}$$

ب) به صورت موازی:

$q=CV$

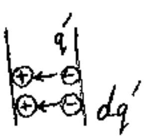


$$\begin{cases} q_1=C_1V \\ q_2=C_2V \\ q_3=C_3V \end{cases}$$

$$q=q_1+q_2+q_3$$

$$CV=C_1V+C_2V+C_3V$$

$$\boxed{C=C_1+C_2+C_3}$$



$$V'=\frac{q'}{C}\Rightarrow W=\int dW=\int_0^q V'dq'=\int_0^q \frac{q'}{C}dq'=\frac{q^2}{2C}$$

$$dW=V'dq'$$

می خواهیم ذره ذره بارهای dq' را از صفحه منفی به صفحه مثبت ببریم فرض می کنیم

در حال حاضر بار q'

روی صفحات باشد و بخواهیم +dq' را از صفحه منفی به مثبت منتقل کنیم در این لحظه ولتاژ V' است.

★ انرژی الکترواستاتیکی یا الکتریکی ذخیره شده در خازن پر شده از بار:

$$\star W=\frac{q^2}{2C}=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}qV$$

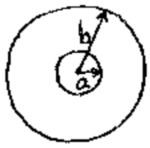
A مساحت هر صفحه

چگالی حجمی انرژی الکترواستاتیکی $u = \frac{W}{V} = \frac{\frac{1}{2}cV^2}{Ad} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{K\varepsilon_0 A}{d})V^2}{Ad} = \frac{1}{2}K\varepsilon_0(\frac{V}{d})^2 = \frac{1}{2}K\varepsilon_0 E^2$

(V : حجم)

$$\boxed{u = \frac{1}{2}K\varepsilon_0 E^2} \qquad E = \frac{V}{d}$$

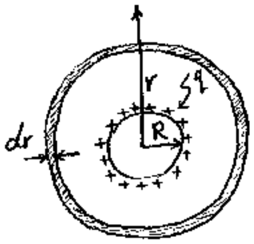
یادآوری خازن کروی :



$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a} \qquad \text{if } b \to \infty \Rightarrow C = 4\pi\varepsilon_0 a$$

* گاهی یک کره‌ی رسانای تنها را نیز می‌توان یک خازن نامید، که در این صورت فرض بر این است که قطب دیگر هم مرکز با این کره و دارای شعاع ∞ است . با این توصیف ظرفیت یک کره‌ی رسانای به شعاع a برابر خواهد بود با : $\star\, C = 4\pi\varepsilon_0 A$

مثال : یک کره‌ی رسانای به شعاع R دارای بار کل q است که به طور یکنواخت روی سطح آن پخش شده است. انرژی الکتریکی ذخیره شده در اطراف این کره را حساب کنید.



$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{in}$$

$$\varepsilon_0 E\, 4\pi r^2 = q \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q}{r^2} \qquad r > R$$

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \,,\, dv = 4\pi r^2 dr \Rightarrow W = \int dW = \int u\, dv = \int_R^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \int_R^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 (\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2})^2 \cdot 4\pi r^2 dr$$

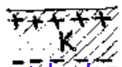
چگالی حجمی

حجم

$$W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{r}\right]_R^\infty = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

یک خازن به باطری 100 ولت وصل است . بار و انرژی ذخیره شده در خازن چقدر است؟

* مثال 27-10 :

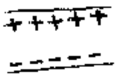


$K = 5 \qquad C_i = 2nF \qquad V_i = 100V$

حالت الف) $W_i = \frac{1}{2}C_i V_i^2 = \frac{1}{2} \times 2\times10^{-7} \times (100)^2 = 10^{-2} J$

باری که در ابتدا ذخیره شد $q_i = C_i V_i = 2\times10^{-9}\times100 = 2\times10^{-7} C$

حالت ب) اکنون باتری را از خازن جدا می‌کنیم و ماده دی الکتریک را از خازن خارج می کنیم. انرژی ذخیره شده در خازن چقدر می شود؟



حالت نهایی : f

$$q_i = q_f$$

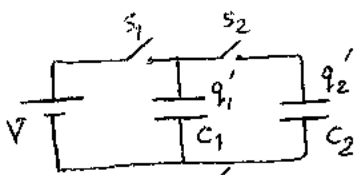
$$C_i = kC_f \Rightarrow C_f = \frac{C_i}{k} = \frac{2}{5} nF$$

$$q_f = C_f V_f \Rightarrow V_f = \frac{q_f}{C_f} = \frac{q_i}{\frac{C_i}{k}} = k(\frac{q_i}{C_i}) = kV_i = 500V$$

$$W_f = \frac{1}{2}C_f V_f^2 = \frac{1}{2}(\frac{C_i}{k})(kV_i)^2 = (\frac{1}{2}C_i V_i^2)\times k = (10^{-5})\times 5 = 5\times10^{-5} J$$

مثال : در شکل زیر در حالیکه کلید S_2 قطع است ابتدا کلید S_1 را می‌بندیم ،

الف) در این حالت انرژی ذخیره شده در دستگاه چقدر است؟



$q_1 = C_1 V$

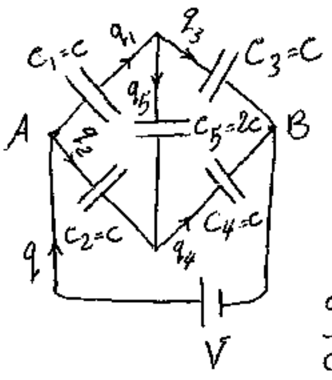
ب) اکنون کلید S_1 را قطع و S_2 را می‌بندیم. انرژی را در این حالت حساب کنید و علت اختلاف با حالت الف را بیان کنید

$$\begin{cases} q_1' = C_1 V' \\ q_2' = C_2 V' \\ q_1' + q_2' = q_1 \end{cases} \Rightarrow C_1V' + C_2V' = C_1V \Rightarrow V' = \frac{C_1}{C_1+C_2}V \,,\, W_f = \frac{1}{2}C_1V'^2 + \frac{1}{2}C_2V'^2 = \frac{1}{2}(C_1+C_2)V'^2$$

$$W_f=\frac{1}{2}(c_1+c_2)\left(\frac{c_1}{c_1+c_2}V\right)^2=\frac{1}{2}c_1V^2\left(\frac{c_1}{c_1+c_2}\right) \Rightarrow W_f=\frac{c_1}{c_1+c_2}W_i$$

مسئله 5 فصل 27 هودرکن :

باری که وارد صفحات 1 و 2 می شود



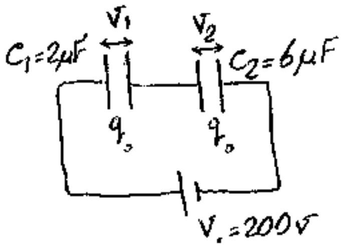
$$\begin{cases} q=q_1+q_2 \\ q_1=q_3+q_5 \\ q_4=q_5+q_2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{q_1}{C_1}+\frac{q_3}{C_3}=V \Rightarrow \frac{q_1}{C}+\frac{q_3}{C}=V \Rightarrow q_1+q_3=CV \\ &\frac{q_2}{C_2}+\frac{q_4}{C_4}=V \Rightarrow \frac{q_2}{C}+\frac{q_4}{C}=V \Rightarrow q_2+q_4=CV \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{q_1}{C_1}+\frac{q_5}{C_5}+\frac{q_4}{C_4}=V \quad / \Rightarrow \overbrace{q_1+q_2}^{q}+\overbrace{q_3+q_4}^{q}=2CV \Rightarrow q=CV$$

مسئله 10 :

الف) در شکل مقابل ولتاژ و بار هر کدام از خازنها را به دست آورید



$$\begin{cases} q_0=C_1V_1 \Rightarrow V_1=\frac{q_0}{C_1}=\frac{300\times10^{-6}}{2\times10^{-6}}=150 \\ q_0=C_2V_2 \Rightarrow V_2=\frac{q_0}{C_2}=\frac{300\times10^{-6}}{6\times10^{-6}}=50 \\ V_1+V_2=V_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{q_0}{C_1}+\frac{q_0}{C_2}=V_0 \Rightarrow q_0\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)=V_0 \Rightarrow q_0=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}V_0 \Rightarrow q_0=\frac{2\times10^{-6}\times6\times10^{-6}}{(2+6)\times10^{-6}}\times200=300\mu C$$

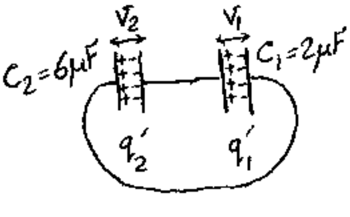
ب) خازنها را از ولتاژ ورودی جدا می کنیم و دو سر مثبت را به هم و دو سر منفی را به هم وصل می کنیم. حال اختلاف پتانسیل و بار هر کدام را بدست آورید.

$$\begin{cases} q_1=C_1V' \\ q_2=C_2V' \\ q_1+q_2=2q_0 \end{cases} \Rightarrow \quad C_1V'+C_2V'=2q_0$$

$$V'=\frac{2q_0}{C_1+C_2}=\frac{2\times300\times10^{-6}}{(2+6)\times10^{-6}}=75V$$

$$q_1=C_1V'=2\times10^{-6}\times75=150\mu C,\quad q_2=C_2V'=6\times10^{-6}\times75=450\mu C$$

ج) اگر سر منفی اولی را به مثبت دومی و مثبت اولی را به منفی دومی وصل کنیم چه اتفاقی می افتد؟



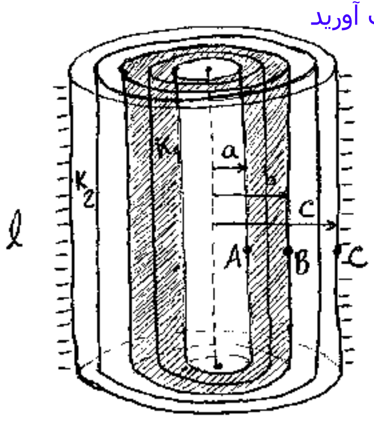
$$\begin{cases} q_1'=C_1V_1' \\ q_2'=C_2V_2' \end{cases} \Rightarrow \frac{q_1'}{C_1}+\frac{q_2'}{C_2}=0 \Rightarrow \frac{q_1'}{C_1}+\frac{q'}{C_2}=0 \Rightarrow q_1'\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)=0$$

$$q_1'-q_2'=+q_0-q_0 \Rightarrow q_1'=q_2' \qquad q_1'=0$$

یک خازن استوانه ای با دو دی الکتریک را در نظر بگیرید. با استفاده از پارامترهای داده شده C را به دست آورید

مسئله 21 :

محاسبهٔ E_1 و E_2 ،



$$\varepsilon_0\oint K_1E_1\cdot dA=q_{in} \Rightarrow \varepsilon_0K_1E_1 2\pi rl=q$$

درون k_1

$$\star\ E_1=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0K_1rl} \quad a<r<b$$

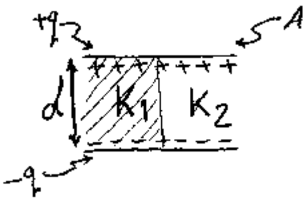
$$\varepsilon_0\oint K_2E_2dA=q_{in} \Rightarrow \varepsilon_0K_2E_2 2\pi rl=q \Rightarrow E_2=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0K_2rl}$$

$$V=V_A-V_C=-\int_C^A\vec{E}\,d\vec{l} \Rightarrow V=-\left[\int_C^B\vec{E_2}\,d\vec{l}+\int_B^A\vec{E_1}\,d\vec{l}\right]$$

$$V=-\int_c^b E_2dr-\int_b^a E_1dr=-\int_c^b\frac{q}{2\pi\varepsilon_0K_2rl}dr-\int_b^a\frac{q}{2\pi\varepsilon_0K_1rl}dr=q\left[\frac{1}{2\pi\varepsilon_0lK_2}\ln\frac{c}{b}+\frac{1}{2\pi\varepsilon_0lK_1}\ln\frac{b}{a}\right]$$

$$\frac{q}{V}=\frac{1}{\dfrac{\ln\frac{c}{b}}{2\pi\varepsilon_0 l K_2}+\dfrac{\ln b/a}{2\pi\varepsilon_0 l K_1}}=\frac{2\pi\varepsilon_0 l K_1 K_2}{K_1\ln\frac{c}{b}+K_2\ln\frac{b}{a}}=C$$

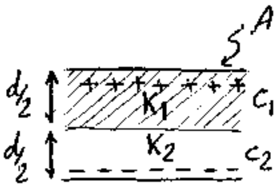
تمرین اضافی 1 :



$$C=C_1+C_2=\frac{K_1\varepsilon_0 A}{2d}+\frac{K_2\varepsilon_0 A}{2d}=\frac{A\varepsilon_0}{d}\left[\frac{K_1+K_2}{2}\right]$$

$$C_1=\frac{K_1\varepsilon_0 A/2}{d}\quad,\quad C_2=\frac{K_2\varepsilon_0 A/2}{d}$$

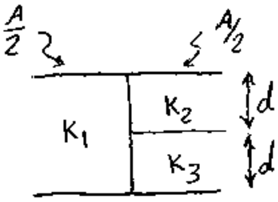
تمرین اضافی 2 :



$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\Longrightarrow C=\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}$$

$$C_1=\frac{K_1\varepsilon_0 A}{d/2}\quad,\quad C_2=\frac{K_2\varepsilon_0 A}{d/2}$$

مسئله فصل 26 هالیدی:



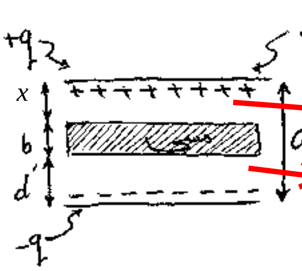
$$C_2=\frac{K_2\varepsilon_0 A/2}{d}\quad,\quad C_1=\frac{K_1\varepsilon_0 A/2}{2d}$$

$$C_3=\frac{K_3\varepsilon_0 A/2}{d}\Longrightarrow C'=\frac{C_2C_3}{C_2+C_3}\Longrightarrow C_{کل}=C'+C_1$$

صفحه رسانا به ضخامت d بین دو صفحه خازن است(نه لزوماً وسط)

مسئله 59 فصل 26 هالیدی:

الف) ظرفیت این خازن را حساب کنید.



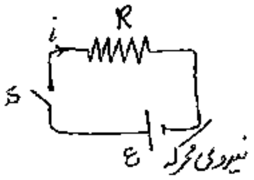
$$C_1=\frac{\varepsilon_0 A}{x}$$

$$C_2=\frac{\varepsilon_0 A}{d-b-x}$$

$$\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{x}{\varepsilon_0 A}+\frac{d-b-x}{\varepsilon_0 A}=\frac{d-b}{\varepsilon_0 A}\Longrightarrow C=\frac{\varepsilon_0 A}{d-b}$$

اینجا هنوز به مفهوم ولتاژ نرسیده ایم و باتری را به عنوان نیروی محرکه در نظر می گیریم

فصل 28 کتاب فیزیک دانشگاهی هودسون : «جریان الکتریکی و مقاومت»



فرض کنید باتری dw کار انجام دهد و dq بار به مدار بفرستد

$i = \frac{dq}{dt}$ شدت جریان ، $\frac{(C)\ \text{کولن}}{(s)\ \text{ثانیه}} = A\ (\text{آمپر})$

* در جهت حرکت بارهای مثبت یا خلاف جهت بارهای منفی در نظر گرفته می شود.

در این صورت ، ولت = $\frac{(\text{ژول})}{(\text{کولن})}$ * $\varepsilon = \frac{dw}{dq}$

ε برابر است با کار انجام شده بر واحد بار

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon\frac{dq}{dt} = \varepsilon I$$

ε همان افزایش انرژی پتانسیل به ازاء واحد بار است (ولتاژ)

$j = \frac{i}{A}$ چگالی سطحی جریان $\Rightarrow j = \frac{di}{dA} \Rightarrow d\vec{i} = \vec{j}\, d\vec{A} \Rightarrow i = \int j\, dA$

A : مساحت مقطع سیم

اگر جریان به طور یکنواخت از سطح مقطع سیم عبور کند:

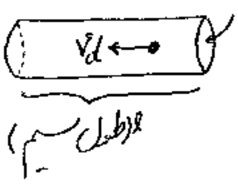
$\begin{cases} V_{Th} \sim 10^{6} \text{ تا } 10^{8} cm/s \\ V_d \sim 10^{-2} cm/s \leftarrow \text{سرعت سوق یا سرعت رانش} \end{cases}$

سرعت انتقال انرژی الکترومغناطیسی از محل منبع به مصرف $\Rightarrow c \simeq 3\times 10^{8} m/s$

* رابطه بین j و V_d را بدست آورید.

چگالی سطحی جریان

سرعت حرکت الکترونها



n = چگالی حجمی الکترونهای رسانش سیم

$l = V_d t$ $\qquad$ $q = nAle$ از طرفی

e : بار الکتریکی الکترون

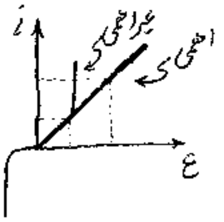
$\Rightarrow i = \frac{q}{t} = \frac{nAle}{\frac{l}{V_d}} = \frac{nAleV_d}{l} = nAeV_d$

$\Rightarrow \frac{i}{A} = neV_d \Rightarrow \boxed{j = neV_d}$ ✓

$dw = Ri^2 dt$

$w = \int dw = \int Ri^2 dt \Rightarrow$ * $W = Ri^2 t$ اگر ثابت باشد

توان باتری ، * $P_\varepsilon = \varepsilon i$ و توان مصرفی ، * $P = \frac{dw}{dt} = Ri^2$



$R = \frac{\varepsilon}{i}$

$i = \frac{\varepsilon}{R}$

فصل 29 «حل مدارهای الکتریکی DC»

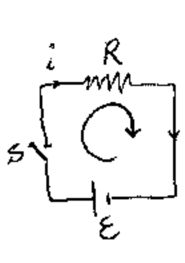
قوانین مداری

1- قانون جریانها یا قانون گره : جمع جبری جریانها در یک گره برابر صفر است. (KCL) $\quad$ * $\sum_{n=1}^{n} i_n = 0$

این قانون در واقع بیانگر اصل پایستگی بار الکتریکی است.

2- قانون پتانسیلها (KVL) یا قانون مدار بسته (حلقه) : در یک مدار، در یک حلقه کامل جمع جبری اختلاف پتانسیلهای قسمتهای مختلف مدار برابر صفر است. $\sum V_n = 0$ در یک حلقه

(این قانون در واقع بیانگر اصل پایستگی انرژی در مدار است)



$-iR + \varepsilon = 0$

$iR = \varepsilon$

$i = \frac{\varepsilon}{R}$

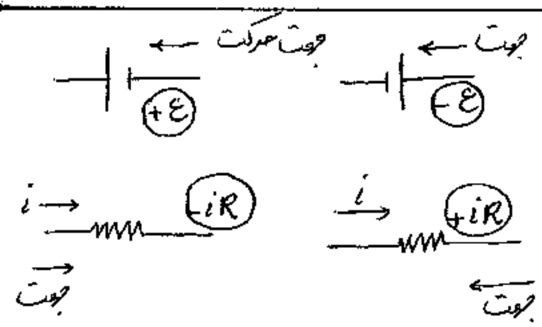
نکته : برای قانون دوم از یک نقطه شروع می کنیم مدار را در جهت دلخواه [illegible] می کنیم و در طول مسیر اختلاف پتانسیلها را جمع می کنیم [illegible]

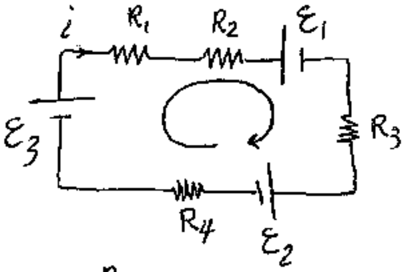
مسائل: فصل 29 هودسون: 60-61-62
فصل 23 هالیدی: 7-94-95

در نوشتن علامت اختلاف پتانسیل ها بصورت زیر عمل می کنیم:

1- در خلاف جهت باتری (از اختلاف پتانسیل زیاد به کم)

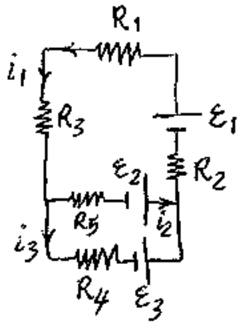
2- اگر یک مقاومت در جهت جریان طی شود، علامت پتانسیل $-iR$.





$$-\varepsilon_2 - iR_4 + \varepsilon_3 - iR_1 - iR_2 - \varepsilon_1 - iR_3 = 0$$

$$\star\ i = \frac{-\varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_1}{R_4 + R_1 + R_2 + R_3}$$



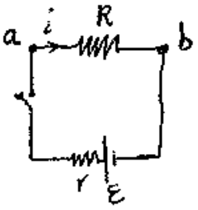
$$\star\ i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$\begin{cases} -i_2 R_5 + \varepsilon_2 - i_1 R_2 + \varepsilon_1 - i_1 R_1 - i_1 R_3 = 0 \\ -i_3 R_4 + \varepsilon_3 - \varepsilon_2 + i_2 R_5 = 0 \end{cases}$$

مقاومت داخلی باتری:

الف) $i = ?$

ب) $V_a - V_b = ?$



$$-iR + \varepsilon - ir = 0 \Rightarrow \boxed{i = \frac{\varepsilon}{R + r}}$$

$$V_a - iR = V_b \Rightarrow V_a - V_b = iR \Rightarrow \boxed{V_{ab} = iR}$$

$$V_a + ir - \varepsilon = V_b \Rightarrow V_a - V_b = \varepsilon - ir \Rightarrow V_{ab} = \varepsilon - ir \Rightarrow V_{ab} = \varepsilon - r\frac{V_{ab}}{R} \Rightarrow V_{ab}\left(1 + \frac{r}{R}\right) = \varepsilon$$

$$\boxed{\star\ V_{ab} = \frac{\varepsilon R}{r + R}}$$

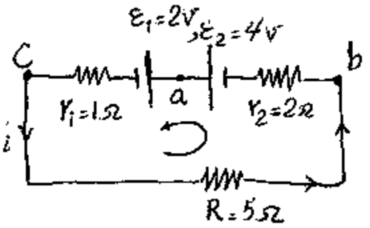
*مثال: در مدار شکل روبرو مطلوب است:

الف) جریان مدار

ب) $V_a - V_b$

ج) $V_a - V_c$

د) تحقیق پایستگی انرژی.



الف) $-iR - ir_2 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 - ir_1 = 0$

$$i = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{R + r_2 + r_1} = \frac{4 - 2}{5 + 2 + 1} = 0{,}25A$$

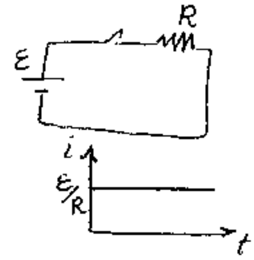
ب) $V_a - \varepsilon_2 + ir_2 = V_b \Rightarrow V_a - V_b = \varepsilon_2 - ir_2 = 4 - 0{,}25 \times 2 = 3{,}5\ V$

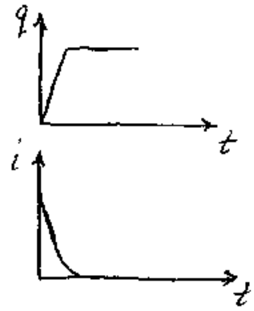
ج) $V_a - \varepsilon_1 - ir_1 = V_c \Rightarrow V_a - V_c = \varepsilon_1 + ir_1 = 2 + 0{,}25 \times 1 = 2{,}25\ V$

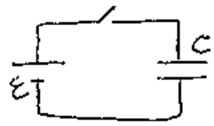
د) $P_{\text{مقاومت}} = Ri^2 + r_1 i^2 + r_2 i^2 = (R + r_1 + r_2)(i^2) = 8 \times \frac{1}{16} = 0{,}5\ \text{watt}$

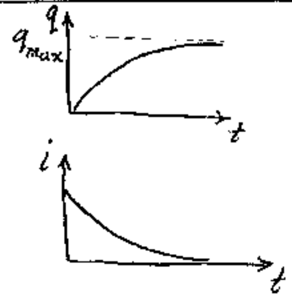
$$\left.\begin{aligned} P_{\varepsilon_1} &= \varepsilon_1 i = 2 \times 0{,}25 = 0{,}5\ \text{watt} \\ P_{\varepsilon_2} &= \varepsilon_2 i = 4 \times 0{,}25 = 1\ \text{watt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_{\varepsilon_2} = P_{\varepsilon_1} + P_{\text{مقاومتها}}$$

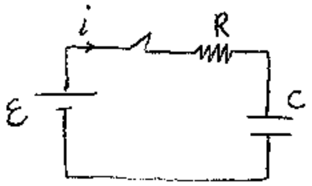
مدارهای RC:





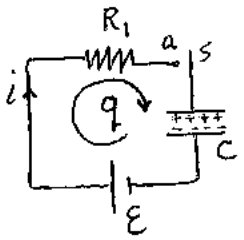






$$\begin{cases} q_{max} = C\varepsilon \\ i_{max} = \varepsilon/R \end{cases}$$

مثال: الف) پرشدن خازن

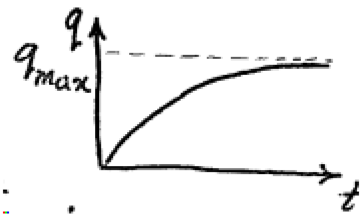


الف) قبل از اتصال کلید به نقطه‌ی a، خازن بدون بار است. در لحظه‌ی $t=0$ کلید به نقطه‌ی a متصل می‌شود پس از اتصال کلید به نقطه‌ی a در یک لحظه‌ی دلخواه t بار و جریان مدار را بدست آورید. حداکثر باری که خازن در این حالت می‌گیرد چقدر است؟

$$\varepsilon - R_1\frac{dq}{dt} - \frac{q}{c} = 0 \Rightarrow \frac{c\varepsilon - q}{c} = R_1\frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{dt}{R_1c} = \frac{dq}{c\varepsilon - q}$$

$$\xRightarrow{\text{و } t \text{ و } q \text{ از } 0 \text{ شروع می‌شوند}} \int_0^t \frac{dt}{R_1c} = \int_0^q \frac{dq}{c\varepsilon - q} \Rightarrow \left[\frac{t}{R_1c}\right]_0^t = -[\ln(c\varepsilon - q)]_0^q$$

$$\Rightarrow \frac{t}{R_1c} = -(\ln(c\varepsilon - q) - \ln(c\varepsilon)) \Rightarrow e^{-\frac{t}{R_1c}} = e^{\ln(c\varepsilon - q)}e^{-\ln(c\varepsilon)}$$



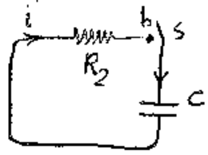
$$\Rightarrow e^{-\frac{t}{R_1c}} = \frac{(c\varepsilon - q)}{c\varepsilon} \Rightarrow q = c\varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{R_1c}}\right)$$

ب) خالی شدن خازن: پس از اینکه در مرحله‌ی الف، خازن C پر شد، کلید دوطرفه را از نقطه‌ی a قطع و مطابق شکل زیر به نقطه‌ی b متصل می‌کنیم در این جریان مدار و بار خازن را بدست آورید.

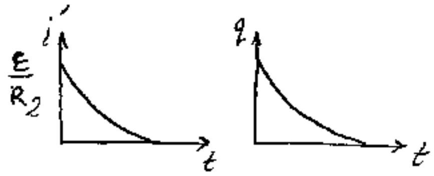
$$\begin{cases} i'R_2 + \frac{q}{C} = 0 \\ i = -\frac{dq}{dt} \end{cases} \quad +R_2\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \int_{q_{max}}^{q} \frac{dq}{q} = -\int_0^t \frac{dt}{R_2C}$$

$$[\ln q]_{q_{max}}^{q} = \left[\frac{-t}{R_2C}\right]_0^t \Rightarrow \ln\frac{q}{q_{max}} = \frac{-t}{R_2C} \Rightarrow q = q_{max}\, e^{\frac{-t}{R_2C}} \Rightarrow q = C\varepsilon\, e^{\frac{-t}{R_2C}}$$

در لحظه‌ی خالی شدن خازن

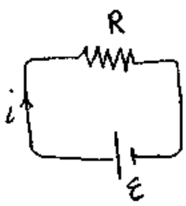


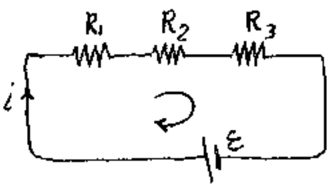
$$i' = \frac{-dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R_2} e^{-t/R_2C}$$



★ به هم بستن مقاومت‌ها و مقاومت معادل:

الف) به صورت متوالی:





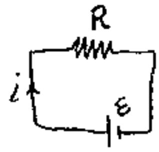
$$\varepsilon - iR_1 - iR_2 - iR_3 = 0$$

$$\varepsilon - i(R_1 + R_2 + R_3) = 0 \quad (2)$$

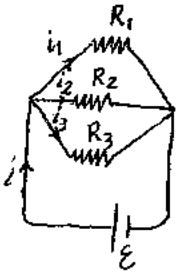
$$\varepsilon - iR = 0 \quad (1)$$

از مقایسه روابط ① و ② نتیجه می‌شود: $\star\; R=R_1+R_2+R_3$ در حالت متوالی

ب) به صورت موازی:



$$\varepsilon - iR = 0$$



$$\begin{cases} \varepsilon - i_1R_1 = 0 \\ \varepsilon - i_2R_2 = 0 \\ \varepsilon - i_3R_3 = 0 \end{cases}$$

$$\star\; i = i_1+i_2+i_3$$

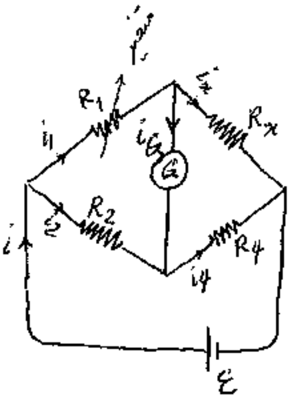
امّا:

$$\star\; \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon}{R_1}+\frac{\varepsilon}{R_2}+\frac{\varepsilon}{R_3}$$

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}$$ در حالت موازی

*پل وتستون:

در حالت تعادل یعنی وقتی $i_G=0$ داریم:

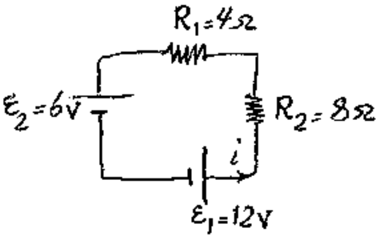


$$\begin{cases} i_1 = i_x \\ i_2 = i_4 \end{cases}$$

$$\star\; \frac{i_1R_1}{i_xR_x} = \frac{i_2R_2}{i_4R_4} \Rightarrow R_1R_4 = R_2R_x \Rightarrow \star\; R_x = \frac{R_1R_4}{R_2}$$

* مسئله 7 فصل 23 هالیدی:

انرژی مصرفی هر کدام از قطعات مدار را به دست آورید



$$+\varepsilon_1 - iR_2 - iR_1 - \varepsilon_2 = 0$$

$$i = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{R_1+R_2} = \frac{12-6}{4+8} = 0{,}5A$$

$$P_{R_1} = R_1 i^2 = (4)(\tfrac{1}{2})^2 = 1 \quad , P_{R_2} = 8(\tfrac{1}{2})^2 = 2$$

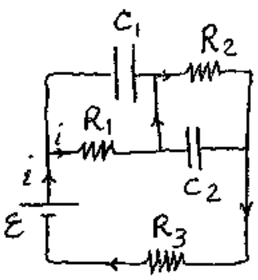
$$P_{\varepsilon_1} = \varepsilon_1 i = 12\times\tfrac{1}{2} = 6 \quad , P_{\varepsilon_2} = 6\times\tfrac{1}{2} = 3$$

$$\star\; P_{R\text{ها}} + P_{\varepsilon_2} = P_{\varepsilon_1}$$

$$1+2+3=6$$

* مسئله 94 فصل 23 هالیدی:

در حالت تعادل انرژی ذخیره شده در مدار را به دست آورید.

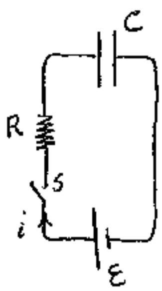


$$W = W_{C_1}+W_{C_2} = \frac{1}{2}C_1V_{C_1}^2 + \frac{1}{2}C_2V_{C_2}^2$$

$$\varepsilon - iR_1 - iR_2 - iR_3 = 0 \Rightarrow i = \frac{\varepsilon}{R_1+R_2+R_3}$$

$$V_{C_1} = iR_1 = \frac{\varepsilon R_1}{R_1+R_2+R_3} \quad , V_{C_2} = \frac{\varepsilon R_2}{R_1+R_2+R_3}$$

انرژی ذخیره شده در خازن به این صورت به دست می آید:



$$\varepsilon - iR - \frac{q}{C} = 0 \quad , i = \frac{dq}{dt}$$

یادآوری:

$$q = C\varepsilon(1-e^{-t/RC}) \quad , i = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}$$

حل:

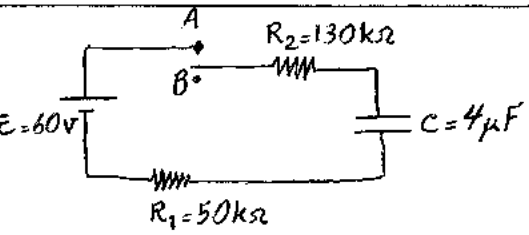
$q_{max} = C\varepsilon$ وقتی خازن کاملاً پر می‌شود.

$$W_C = \frac{1}{2}C\varepsilon^2 = \frac{q_{max}^2}{2C} \quad , W_\varepsilon = q_{max}\,\varepsilon = C\varepsilon^2$$

در مدار مقابل کلید در وضعیت A گذاشته می شود تا C پر شود. الف) ثابت زمانی شارژ مدار چقدر است؟

ب) جریان اولیه شارژ چقدر است؟

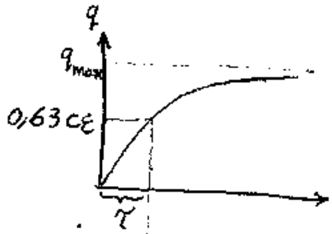
فصل 29 هودرسون مسئلهٔ 60 :



نکتهٔ این مسئله :

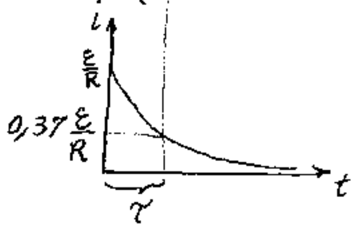
$$\star\ \tau = RC \qquad \star\ q_t = C\varepsilon(1-e^{-t/RC})$$

$$\star\ i_t = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}$$



$$\begin{cases} q_\tau = C\varepsilon(1-e^{-RC/RC}) = C\varepsilon(1-\frac{1}{e}) = C\varepsilon(1-\frac{1}{2{,}7}) = 0{,}63\,C\varepsilon = 0{,}63\,q_{max} \\ i_\tau = \frac{\varepsilon}{R}e^{-RC/RC} = \frac{\varepsilon}{R}(\frac{1}{e}) = 0{,}37\frac{\varepsilon}{R} = 0{,}37\,i_{max} \end{cases}$$

در زمان RC مقدار بار شارژ شده اینقدر است



حل بخش اوّل (اتصال کلید به نقطهٔ A) :

الف) $\tau = (R_1+R_2)C = (50+130)\times10^3\times4\times10^{-6} = 720\times10^{-3}\,s$

ب) $i_0 = \frac{\varepsilon}{R_1+R_2} = \frac{60}{(50+130)\times10^3} = \frac{1}{3}\times10^{-3}\,A$

ج) چقدر طول می کشد تا C به اندازه 50 ولت شارژ شود؟
د) انرژی ذخیره شده در خازن کامل شارژ شده چقدر است؟
پس از شارژ کامل کلید را به حالت B می بریم

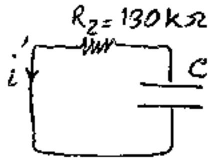
ج) $\frac{V_C}{\varepsilon} = 1-e^{\frac{-t}{(R_1+R_2)C}} \Rightarrow \frac{50}{60} = 1-e^{\frac{-t}{0{,}72}} \Rightarrow \frac{1}{6} = e^{\frac{-t}{0{,}72}} \Rightarrow \frac{-t}{0{,}72} = \ln\frac{1}{6} = \ln 1 - \ln 6 \Rightarrow t = 1{,}29\,s$

د) $W = \frac{q^2}{2C} \Rightarrow W_{max} = \frac{q_{max}^2}{2C} = \frac{1}{2}C\varepsilon^2 = \frac{1}{2}\times4\times10^{-6}\times(60)^2$

حل بخش دوّم : درحالت اتصال به B (البته بعد از اینکه در بخش اوّل خازن کاملاً پر شده) $q_0 = q_{max} = C\varepsilon$ در این بخش

ه) ثابت زمانی تخلیه چقدر است؟
و) جریان اولیه دشارژ چقدر است؟
ز) ولتاژ دو سر C بلافاصله پس از تغییر وضعیت کلید به B چقدر است؟

$\tau = R_2C \Rightarrow \tau = 130\times10^3\times4\times10^{-6} = 0{,}52\,s$



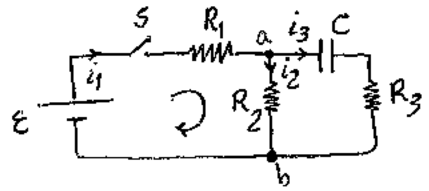
$$+\frac{q}{C} - i'R_2 = 0$$

$i'_0 = \frac{q_0}{R_2C} = \frac{C\varepsilon}{R_2C} = \frac{\varepsilon}{R^2} = \frac{60}{130\times10^3} = \frac{6}{13}\times10^{-3}\,A$

$$i' = \frac{q_0}{R_2C}e^{-t/R_2C}$$

$q = q_0e^{\frac{-t}{R_2C}} \Rightarrow V_C = \varepsilon e^{-t/R_2C} = 60e^{-1/0{,}52} = 8{,}79\,V$

مسئلهٔ 62 فصل 29 هودرسون :

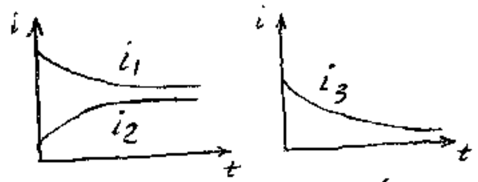


بخش اوّل : کلید در لحظهٔ $t=0$ بسته می شود

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$\varepsilon - i_1R_1 - i_2R_2 = 0 \quad , \quad \varepsilon - i_1R_1 - \frac{q}{C} - i_3R_3 = 0 \quad , \quad i_3 = \frac{dq}{dt}$$

$$\left.\begin{aligned} R_i &= (R_2 \parallel R_3) \text{ متوالی } R_1 \\ R_f &= (R_2) \text{ متوالی } R_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad R_i < R_f$$



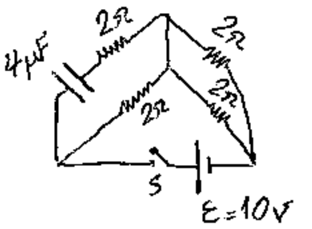
بخش دوّم : پس از اینکه خازن کاملاً پر شده کلید قطع می شود.

$$q = q_0e^{\frac{-t}{(R_2+R_3)C}} \qquad i = \frac{-dq}{dt} = \frac{q_0}{(R_2+R_3)C}e^{\frac{-t}{(R_2+R_3)C}}$$

at $t=\infty$ $\quad \varepsilon - i_1R_1 - i_2R_2 = 0 \Rightarrow i_1 = i_2 = i = \frac{\varepsilon}{R_1+R_2}$, $V_{ab} = V_C = iR_2 = \frac{\varepsilon R_2}{R_1+R_2}$, $q_{max} = \frac{C\varepsilon R_2}{R_1+R_2} = q_0$

چند تمرین از فصل مدارها:

تمرین ۱: در شکل زیر قبل از اتصال کلید خازن بدون بار است.

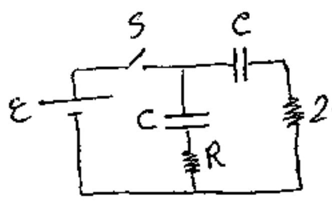


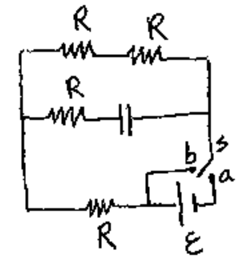
الف) روابط لازم برای بدست آوردن جریان هر شاخه را در یک زمان دلخواه t بنویسید.

ب) در لحظه $t=0$ (لحظه اتصال کلید) شدت جریان i چقدر است؟

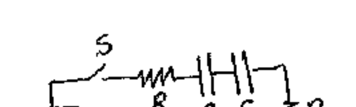
ج) وقتی خازن کاملاً پر می‌شود، بار ذخیره شده در آن چقدر است؟

تمرین ۲: در مدار شکل زیر پس از بسته شدن کلید جریان هر شاخه را بدست آورید.
(قبل از اتصال کلید خازن‌ها بدون بارند)





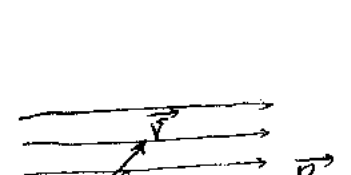
تمرین ۳: بخش اول - کلید به نقطه a متصل می‌شود پس از پر شدن کامل خازن بار آن چقدر است؟
بخش دوم - پس از اینکه خازن در بخش اول پر شد کلید از a قطع و به b می‌رسد (وصل می‌شود)
در این حالت جریان عبوری از خازن را برحسب زمان و سایر داده‌های مسئله بدست آورید.



تمرین ۴: در مدار شکل روبرو پس از بسته شدن کلید جریان عبوری i چقدر است؟

«فصل 30 «میدان مغناطیسی»»

تعریف و تعیین $\vec{B}$: داشتیم، $\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q}$



$$\vec{F}_B = q\vec{V}\times\vec{B}$$

$$F_B = qVB\sin\theta \Rightarrow \vec{B}=\frac{\vec{F}_B}{qV\sin\theta}$$

*واحد $\vec{B}$: $\frac{N}{C\cdot m/s}=\frac{N.m}{A.m^2}=\frac{weber}{m^2}=Tesla(T)$

یکای B در دستگاه M.K.S تسلا (T) است.
یکای B در دستگاه C.G.S گاوس (G) است.

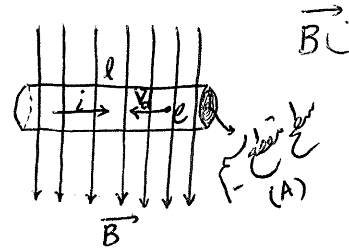
$*1T=10^4G$

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{mV^2}{R} \\ F &= qVB\sin\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow qVB=\frac{mV^2}{R} \Rightarrow$$ شعاع دایره مدار $*R=\frac{mV}{qB}$

$$\begin{cases} V=R\omega \Rightarrow \omega=\frac{qB}{m} \\ \omega=2\pi f \end{cases} \quad , \quad f=\frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow f=\frac{qB}{2\pi m}$$ بسامد یا فرکانس

(دوره تناوب) $T=1/f$

*مثال: یک سیم مستقیم به طول l که حامل جریان i است، مطابق شکل در یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ واقع شده است. نیروی وارد بر این سیم را بدست آورید.



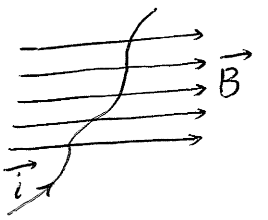
$\vec{F}=q\vec{V}\times\vec{B}$ چگالی حجمی الکترون‌ها درون سیم

$F_e=eV_dB \Rightarrow F_{سیم}=(Aln)eV_dB$

چگالی جریان $j=\frac{i}{A}=neV_d$

* بردار l برابر طول سیم و جهت آن در جهت جریان $\Rightarrow \vec{F}_{سیم}=i\vec{l}\times\vec{B}$ $\Rightarrow F_{سیم}=AljB$

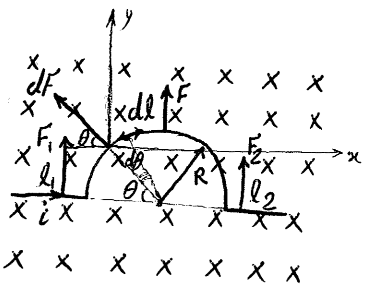
* اگر سیم مستقیم نباشد:



$d\vec{F}=i\,d\vec{l}\times\vec{B}$

$* \; \vec{F}=\int_{کل سیم} d\vec{F}$

*مثال: در شکل زیر مدار حامل جریان i در میدان مغناطیسی یکنواخت خارجی B واقع شده است. نیروی وارد بر هر قسمت را به طور جداگانه حساب کنید.



$\vec{F}_1=i\vec{l}_1\times\vec{B} \Rightarrow \begin{cases} F_1=il_1B \\ F_2=il_2B \end{cases}$

$d\vec{F}=i\,d\vec{l}\times\vec{B} \Rightarrow dF=i\,dl\,B$

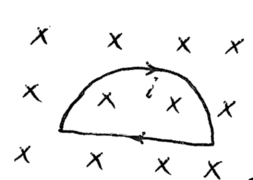
$F_x=\int_0^\pi dF_x=\int_0^\pi dF\cos\theta=0$

$F_y=\int_0^\pi dF_y=\int_0^\pi dF\sin\theta=\int_0^\pi i\,dl\,B\sin\theta=iB\int_0^\pi R\sin\theta\, d\theta=iRB\left[-\cos\theta\right]_0^\pi=2iRB$

*نکته:

$*\vec{F}=\oint d\vec{F}=\oint i\,d\vec{l}\times\vec{B}=i\left[\oint d\vec{l}\right]\times\vec{B}=0$ چون B یکنواخت است.

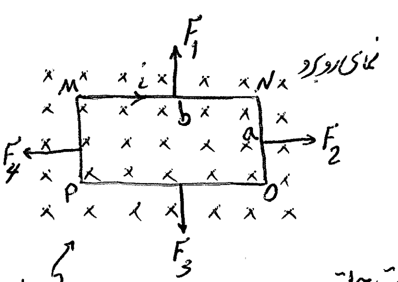
روی سیم بسته

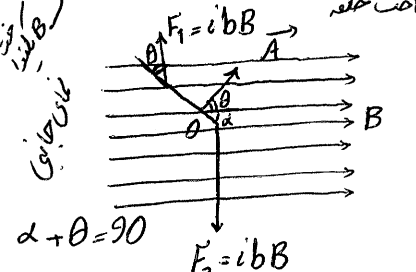


$*\oint d\vec{l}=0$

*گشتاور نیروی وارد بر یک حلقه‌ی جریان:

یک حلقه‌ی سیم مستطیل شکل به عرض a و طول b، حامل جریان i است و به گونه‌ای در یک میدان مغناطیسی خارجی یکنواخت B واقع شده است که خط عمود بر صفحه‌ی حلقه با $\vec{B}$ زاویه‌ی θ می‌سازد. گشتاور نیروی وارد بر این حلقه را بدست آورید.





مساحت حلقه $A=ab$

$\tau_1=r\times F_1 \Rightarrow \tau_1=\left(\frac{a}{2}\right)(ibB)\sin\theta$

$\tau_3=r\times F_3 \Rightarrow \tau_3=\left(\frac{a}{2}\right)(ibB)\sin\theta$

$\tau=\tau_1+\tau_2 \Rightarrow \tau=iabB\sin\theta \Rightarrow \tau=iAB\sin\theta$

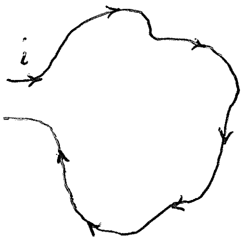
$F_2=ilB\sin\alpha=iaB\sin\alpha=iaB\cos\alpha \Rightarrow \tau_2=r\times F_2=\left(\frac{b}{2}\right)iaB\cos\alpha$

*اگر حلقه N دور داشته باشد:

$\tau = NiAB\sin\theta$

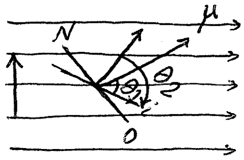
$\tau = \mu B\sin\theta$ $\Big\}$ $\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}$

*μ عمود بر سطح حلقه است و جهت آن طبق قاعده‌ی دست راست بدست می‌آید.
هرگاه خم شدن انگشتان دست راست در جهت i قرار گیرند،
شصت دست راست جهت μ را نشان می‌دهد.



گشتاور دوقطبی مغناطیسی حلقه $*\mu = NiA$

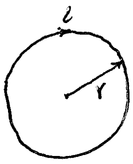
مساحت محصور توسط حلقه



$$*W = \int dw = \int \tau d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu B\sin\theta d\theta = \mu B\left[-\cos\theta\right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$*\Delta U = W = -\mu B\left[\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right] \quad if \begin{cases}\theta_1 = \pi/2 \\ \theta_2 = \theta\end{cases} \Rightarrow \Delta U = W = -\mu B\cos\theta = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$$

*مسئله 54 فصل 24 هالیدی:



$r = 15cm$
$i = 2{,}6A$
$B = 12T$
$\theta = 41^\circ$

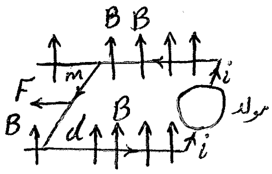
$A = \pi r^2$

(الف $\mu = NiA$

$\mu = (1)(2{,}6)(3{,}14)\left(\frac{15}{100}\right)^2$

(ب $\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B} \Rightarrow \tau = \mu B\sin\theta = \mu(12)\sin 41^\circ$

*مسئله 44 فصل 24 هالیدی:

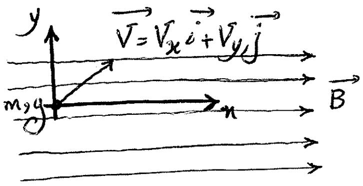


$\vec{F} = i\vec{l}\times\vec{B}$

$F = idB \Rightarrow F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{idB}{m}$

$V = at = \frac{idB}{m}t$

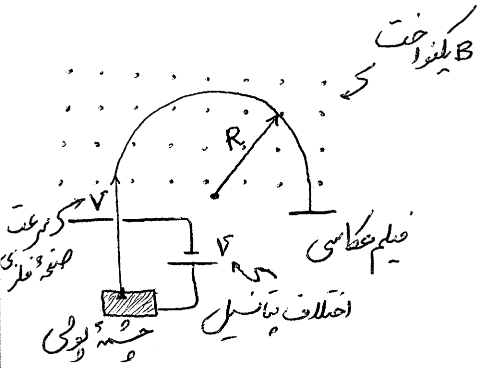
*مسئله 2 فصل 30 هودرون،



$F = ?$

$$\vec{F} = q\vec{V}\times\vec{B} \Rightarrow \vec{F} = q\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ V_x & V_y & 0 \\ B_x & 0 & 0\end{vmatrix} = -qV_yB_x\hat{k}$$

*مسئله 11 فصل 30 هودرون: «اساس کار دستگاه طیف سنج جرمی»



$\vec{F} = q\vec{V}\times\vec{B}$

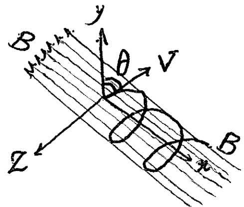
$F = qVB = \frac{mV_x^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mV_x}{qB} = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2qV}{m}}$

$\boxed{R = \sqrt{\frac{2mV}{qB^2}}}$

V_x: سرعت
V: اختلاف پتانسیل

$qV = \frac{1}{2}mV_x^2 \Rightarrow mV_x^2 = 2qV \Rightarrow V_x = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$

*مسئله 32 فصل 30 هودرون:



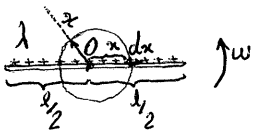
$\theta = 20^\circ,\ V = 3\times10^6\, m/s$

$\vec{F} = q\vec{V}\times\vec{B} \Rightarrow \begin{cases}V_x = V\sin 20^\circ \\ V_y = V\cos 20^\circ\end{cases}$

شعاع مارپیچ $*R = \frac{mV_y}{qB} = \frac{mV_y}{eB}$ $\quad * \frac{2\pi}{T} = \omega = \frac{V_y}{R} = \frac{eB}{m} \Longrightarrow T = \frac{2m\pi}{eB}$

گام مارپیچ $*P = V_x T = (V\sin 2\theta)\left(\frac{2m\pi}{eB}\right)$

*مسئله 47 فصل 30 هودرن:



$$\left.\begin{array}{l} dq = \lambda dx \\ di = \frac{2dq}{T} \end{array}\right\} d\mu = (di)(\pi x^2) = \frac{2dq}{T}(\pi x^2)$$

$$d\mu = \frac{2\lambda dx(\pi x^2)}{2\pi} = \omega\lambda x^2 dx$$

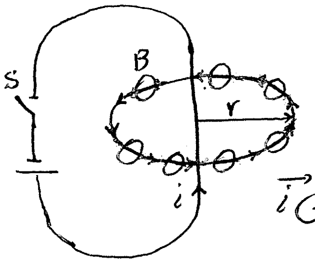
$$\mu = \int d\mu = \int_0^{l/2} \omega\lambda x^2 dx = \omega\lambda\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{l/2} = \frac{\omega\lambda}{3}\left(\frac{l^3}{8}\right) = \frac{\omega\lambda l^3}{24}$$

* فصل 31 هودسون : «چشمه‌ها یا منابع میدان مغناطیسی»

*قوانین آمپر و بیوساوار:

یادآوری: ← q چه ساکن و چه متحرک $\longrightarrow \vec{E} \Rightarrow$ 1- روش المان گیری کولن: $dE = k\frac{dq}{r^2}$ ، 2- روش قانون گاوس: $\varepsilon_0 \oint E\,dA = q_{in}$

i جریان الکتریسیته $\longrightarrow \vec{B} \Rightarrow$ 1- روش المان گیری بیوساوار یا 2- روش استفاده از قانون آمپر



سیم نازک و بسیار بلند و حامل جریان i

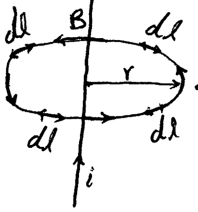
$$B \propto \frac{i}{r}$$

$$B = k'\frac{i}{r}$$

$$k' = 2\times10^{-7}\,\frac{T.m}{A}$$

$$\mu_0 = 2\pi k' = 4\pi\times10^{-7}\,T.m/A$$

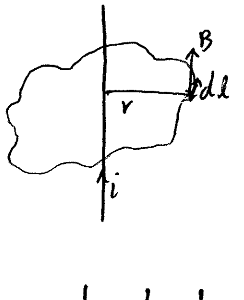
$$\Longrightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$



حلقه دایره‌ای که سیم از مرکز آن عبور می‌کند

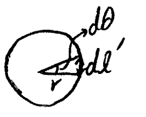
$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \oint B.dl\cos 0 = \oint B dl = \oint \frac{\mu_0 i}{2\pi r}dl = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\overbrace{\oint dl}^{2\pi r} = \mu_0 i$$

$$*\oint \vec{B}\vec{dl} = \mu_0 i \longrightarrow \text{قانون آمپر}$$

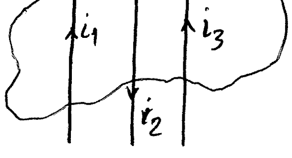


سیم نازک و بسیار بلند

$$*\oint \vec{B}.\vec{dl} = \oint B dl\cos\alpha = \oint \frac{\mu_0 i}{2\pi r}dl' = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\oint\frac{dl'}{r} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\overbrace{\oint\frac{r d\theta}{r}}^{2\pi} = \mu_0 i$$



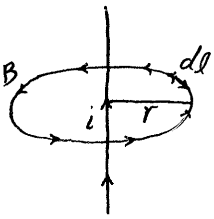
$dl' = r d\theta$



$$\left\{\begin{array}{l} \oint B_1.dl = \mu_0 i_1 \\ \oint \vec{B_2}.\vec{dl} = -\mu_0 i_2 \\ \oint \vec{B_3}.\vec{dl} = \mu_0 i_3 \end{array}\right. \Longrightarrow \vec{B} = \vec{B_1} + \vec{B_2} + \vec{B_3} \Rightarrow *\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0(i_1 - i_2 + i_3)$$

*مثال هایی از کاربرد قانون آمپر:

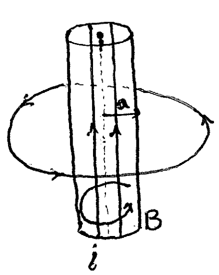
*مثال 1: از یک سیم نازک بسیار بلند جریان i می گذرد با استفاده از قانون آمپر B را در فاصله r از سیم بدست آورید.



$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 i \Rightarrow \oint B\,dl\cos 0 = \mu_0 i \Rightarrow B\oint dl = \mu_0 i \Rightarrow B(2\pi r) = \mu_0 i$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

*مثال 2: از یک سیم رسانای بسیار بلند توپر استوانه ای شکل به شعاع مقطع a جریان i می گذرد. فاصله هر نقطه دلخواه را تا محور سیم r بگیرید و B را برای نواحی $r<a$ و $r=a$ و $r>a$ بدست آورید.

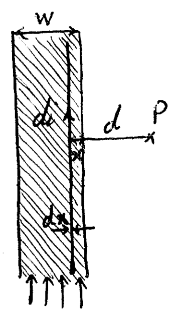


$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 i_{net} \Rightarrow \oint B\,dl\cos 0 = \mu_0 i_{net} \Rightarrow B\oint dl = \mu_0 i_{net}$$

$$B(2\pi r) = \mu_0\left(\frac{\pi r^2}{\pi a^2} i\right) \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i r}{2\pi a^2} \quad : r \leq a$$

for $r>a$: $\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 i \Rightarrow B(2\pi r) = \mu_0 i \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad : r>a$

*مثال 3: از یک سیم به پهنای w و ضخامت ناچیز و طول بسیار بلند جریان i می گذرد B را در نقطه P واقع در صفحه سیم و به فاصله d از لبه آن حساب کنید.

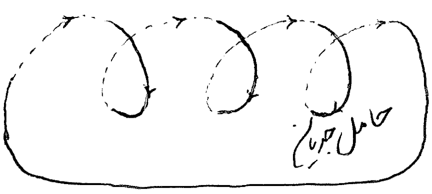


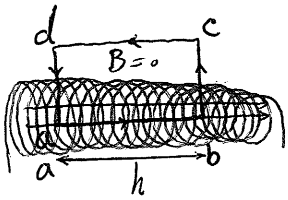
$$di = \frac{dx}{w} i$$

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0\, di}{2\pi(x+d)} = \int_0^w \frac{\mu_0 i\, dx}{2\pi w(x+d)} = \frac{\mu_0 i}{2\pi w} \ln\frac{w+d}{d} \checkmark$$

*بررسی میدان یک سیملوله یا سولنوئید:

تمرین: از یک سیملوله ایده آل که دارای n دور سیم در واحد طول است، جریان i می گذرد. B را در نقاط داخل این سیملوله حساب کنید.

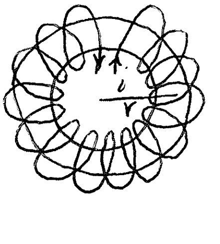




$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 i_{net} \Rightarrow \int_a^b \vec{B}\cdot\vec{dl} + \int_b^c \cancel{\vec{B}\cdot\vec{dl}} + \int_c^d \cancel{\vec{B}\cdot\vec{dl}} + \int_d^a \cancel{\vec{B}\cdot\vec{dl}} = \mu_0 (nhi)$$

$$Bh = \mu_0 n i h \Rightarrow B = \mu_0 n i$$

*میدان یک چنبره:

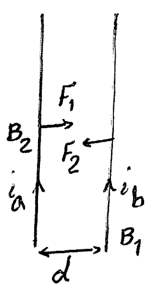


N: تعداد دوران چنبره

$B = \mu_0 n i \Rightarrow$ میدان یک سیملوله

$$B = \mu_0 \frac{Ni}{2\pi r} \Rightarrow$$ میدان یک چنبره

★مثال:

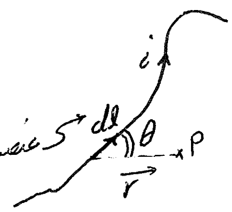


$$B_1 = \frac{\mu_0 i_a}{2\pi d} \quad , \quad B_2 = \frac{\mu_0 i_b}{2\pi d}$$

$$\begin{cases} \vec{F_2} = i_b \, \vec{l} \times \vec{B_1} = \dfrac{i_b \, l \, \mu_0 \, i_a}{2\pi d} \\ \vec{F_1} = i_a \, \vec{l} \times \vec{B_2} = \dfrac{i_a \, l \, \mu_0 \, i_b}{2\pi d} \end{cases}$$

★ قانون بیوساوار:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \, i \, d\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 \, i \, d\vec{l} \times \hat{r}}{4\pi r^2}$$

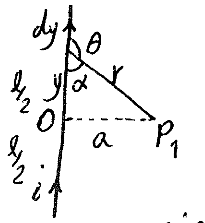


$d\vec{l}$ عنصری از طول سیم در جهت جریان

$$\star dB = \frac{\mu_0 \, i \, dl \sin\theta}{4\pi r^2} \quad , \quad \vec{B} = \int d\vec{B}$$

★مثال: شکل زیر سیم مستقیم به طول l که قسمتی از یک مدار حامل جریان i است را نشان می دهد. میدان حاصل از این قطعه سیم را،

الف) در نقطه‌ی P_1 واقع بر عمود منصف سیم و به فاصله‌ی a از سیم بدست آورید.



$$\alpha = \pi - \theta$$

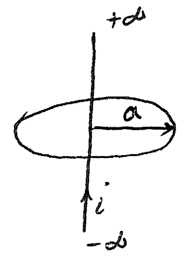
$$\sin\alpha = \sin(\pi - \theta)$$

$$\sin\alpha = \sin\theta = \frac{a}{r} \quad \Rightarrow r = (y^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0 i \, dy \sin\theta}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{\sin\theta \, dy}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{a \, dy}{(y^2+a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i a}{4\pi} \int \frac{dy}{(y^2+a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i a}{4\pi} \left[\frac{1}{a^2} \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2+a^2}} \right]$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \left[\frac{y}{\sqrt{y^2+a^2}} \right]_{-l/2}^{+l/2} \quad \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \times \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4a^2}}$$

تذکر: اگر طول سیم بینهایت باشد از روش بیوساوار به طریق فوق عمل می کنیم.



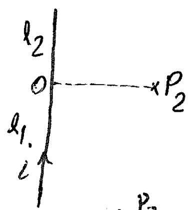
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

$$B(2\pi a) = \mu_0 i \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi a}$$

یا $B = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \left[\frac{y}{\sqrt{y^2+a^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\mu_0 i}{2\pi a}$

ب) B را در نقطه‌ی P_2 مطابق شکل بدست آورید.

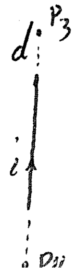
«مشابه مسئله‌ی 21 فصل 31 هودگمان»



$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \left[\frac{y}{\sqrt{y^2+a^2}} \right]_{-l_1}^{+l_2}$$

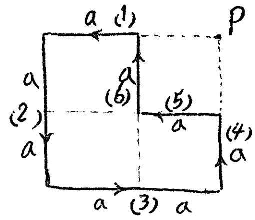
$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \left[\frac{l_2}{\sqrt{l_2^2+a^2}} + \frac{l_1}{\sqrt{l_1^2+a^2}} \right]$$

ج) B را در نقاط P_3 و P_4 مطابق شکل پیدا کنید.



$$B_{P_4} = B_{P_3} = 0$$

* مسئله 33 فصل 25 هالیدی:



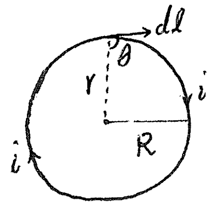
$B_P = ?$

$B_1 = B_4 = 0$

$B = B_2 + B_3 - B_5 - B_6$

$$B_5 = B_6 = \frac{\mu_0 i}{4\pi a}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+a^2}}\right] \quad , \quad B_2 = B_3 = \frac{\mu_0 i}{4\pi(2a)}\left[\frac{2a}{\sqrt{4a^2+4a^2}}\right]$$

* مثال: مطابق شکل حلقه سیم دایره‌ای شکل به شعاع R حامل جریان i است. B را در مرکز حلقه سیم بدست آورید.

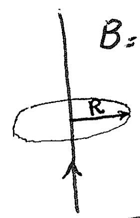


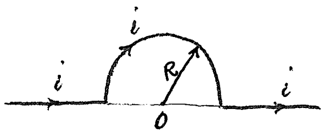
$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0 i\, dl \sin\theta}{4\pi r^2} \qquad \theta = 90^\circ \qquad r = R$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2}\int^{2\pi r} dl = \frac{\mu_0 i}{2R}$$

* یادآوری سیم بلند:

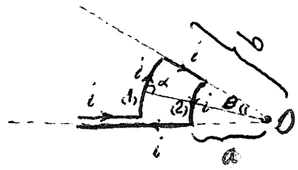
$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$





$$B = \frac{\mu_0 i}{4R}$$

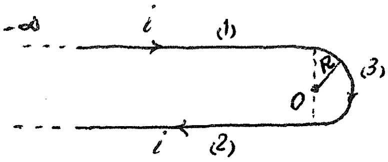
* مسئله 8 فصل 31 هودسون:



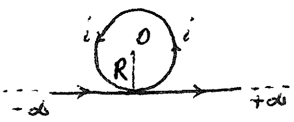
$B_O = ?$

$$dB_1 = \frac{\mu_0 i\, dl \sin\alpha}{4\pi b^2} \quad (\alpha = 90^\circ) \Rightarrow B_1 = \int dB_1 = \frac{\mu_0 i}{4\pi b^2}\int^{b\theta} dl = \frac{\mu_0 i\theta}{4\pi b} = B_1$$

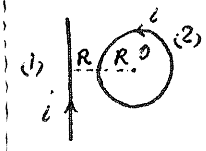
$$\Rightarrow B_2 = \frac{\mu_0 i\theta}{4\pi a} \qquad \Rightarrow B_O = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 i\theta}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$



$$\Rightarrow B_y = B_1 + B_2 + B_3 \quad \Rightarrow B_y = \left(\frac{\mu_0 i}{4\pi R}\right)\times 2 + \frac{\mu_0 i}{4R}$$

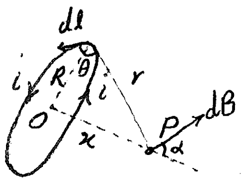


$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} + \frac{\mu_0 i}{2R}$$



$$B = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi(2R)} + \frac{\mu_0 i_2}{2R}$$

* مسئله 17 فصل 31 هودسون:



$* B_P = ?$

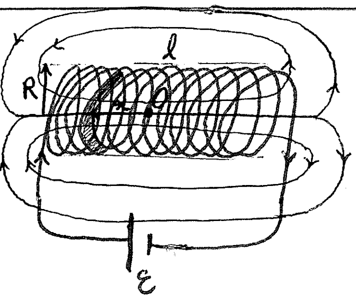
$$dB = \frac{\mu_0 i\, dl \sin\theta}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 i\, dl}{4\pi r^2}$$

$\cos\alpha = \dfrac{R}{r}$

$r = (x^2+R^2)^{1/2}$

$$\begin{cases} B_x = \int dB_x = \int dB\cos\alpha = \int \dfrac{\mu_0 i\, dl}{4\pi r^2}\cos\alpha = \dfrac{\mu_0 i\cos\alpha}{4\pi r^2}\displaystyle\int^{2\pi R} dl = \dfrac{\mu_0 i R\cos\alpha}{2r^2} = \dfrac{\mu_0 i R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}} \\ B_y = \int dB_y = \int \text{----} = 0 \\ B_z = \int dB_z = \int \text{----} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 i R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$



$B_0 = ?$

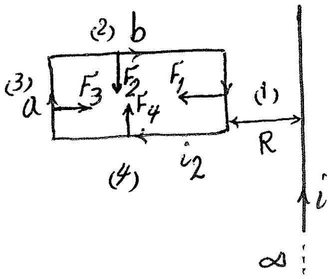
$di = \frac{N}{l} dx\, i$

$B = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}$

$B = 2 \times \int_0^{l/2} dB = \frac{\mu_0 i R^2 \frac{N}{l} dx}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$

$B = 2 \times \frac{\mu_0 N R^2}{2l} \int_0^{l/2} \frac{dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 N}{\sqrt{l^2+4R^2}}$

★ مسئله 10:



$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi R}$

$B_3 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi (R+b)}$

$\vec{F_1} = i_2\, l \times \vec{B_1}$

$F_1 = \frac{i_2 a \mu_0 i_1}{2\pi R}$, $F_3 = \frac{i_2 a \mu_0 i_1}{2\pi (R+b)}$

$F_{net} = F_1 - F_3 = \frac{\mu_0 i_1 i_2 a}{2\pi} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+b}\right)$

★ فصل 32: قانون القاء فاراده « Faraday low of Induction »

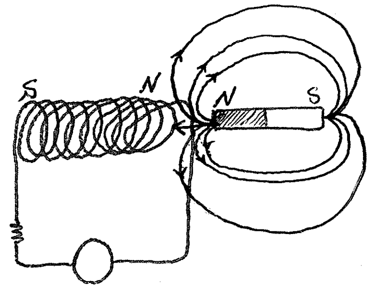
شار الکتریکی ★ $\varphi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$

★ $\varphi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$

★ نیروی محرکه القائی $\varepsilon = -N \frac{d\varphi_B}{dt}$

تعداد دورهای حلقه.

$i = \frac{\varepsilon}{R}$ جریان القایی



اگر B ثابت، $\varphi_B = BA \Rightarrow \varepsilon = -N \frac{d(BA)}{dt}$

★ $\varepsilon = -N\left[A \frac{dB}{dt} + B \frac{dA}{dt}\right]$

★ سوی جریان القایی توسط قانون لنز تعیین می شود.

★ قانون لنز: سوی جریان القایی طوری است که همواره (توسط آثاری که بوجود می آورد) با عامل به وجود آورنده خود مخالفت می کند.

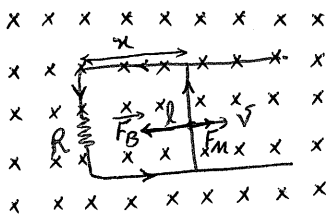
این قانون در واقع بیان اصل پایستگی انرژی در مدار است.

★ مثال 1: (ایجاد ε القایی در اثر تغییر مساحت)

الف) ε القایی؟

ب) i (بزرگی و جهت) را بدست آورید.

ج) پایستگی انرژی را تحقیق کنید.



جهت B به طرف داخل

$\varphi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = BA = Blx$

روی سطح حلقه

$N = 1 \Rightarrow \varepsilon = -\frac{d\varphi_B}{dt} = \frac{-d}{dt}(Blx) = -Bl\frac{dx}{dt} = -Blv$

$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{-Blv}{R}$

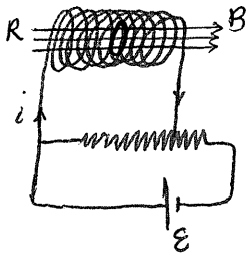
جهت جریان پادساعتگرد.

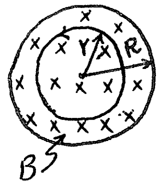
$\vec{F_B} = i\vec{l} \times \vec{B} \Rightarrow F_B = ilB = \left(\frac{-Blv}{R}\right) lB = \frac{-B^2 l^2 v}{R}$, $F_M = F_B \Rightarrow P_M = F_M v = \frac{-B^2 l^2 v^2}{R}$ توان شخص

توان مقاومت $P_R = Ri^2 = R\left(\frac{-Blv}{R}\right)^2 = \frac{B^2 l^2 v^2}{R} = -P_M$ ★ توان شخص = توان مقاومت اما در جهت عکس

تمارین { فصل 32 هودسون: 5_7_40 ؛ فصل 26 هالیدی: 35_65

*مثال 2: (ایجاد ε القایی در اثر تغییرات B)





وقتی B زیاد میشود

$$B=\mu_0 ni$$

$$\varphi_B=BA=B\pi r^2$$

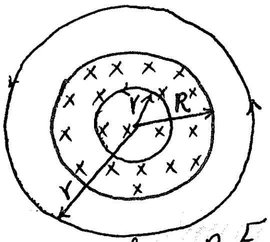
$$\varepsilon=-\frac{d\varphi_B}{dt}=-\pi r^2\frac{dB}{dt}$$

$F=qE$, $W=Fl$ $\Rightarrow W=(qE)(2\pi r)$ از طرف دیگر: $W=q\varepsilon$ $\Rightarrow q\varepsilon=(qE)(2\pi r)$ $\Rightarrow \varepsilon=E.2\pi r$

$$\oint\vec{E}\cdot\vec{dl}=\oint E\,dl=E\oint dl=E.2\pi r \Rightarrow \oint\vec{E}\cdot\vec{dl}=\varepsilon$$

شکل انتگرالی قانون القاء فاراده: $\oint\vec{E}\cdot\vec{dl}=\frac{-d\varphi_B}{dt}$

*تمرین: در مثال فوق $\frac{dB}{dt}\neq 0$ است E را برای نواحی $r<R$ و $r>R$ بدست آورید.



$$\oint\vec{E}\cdot\vec{dl}=\frac{-d\varphi_B}{dt}$$

for $r<R$: $E.2\pi r=\frac{-d}{dt}(\pi r^2B) \Rightarrow E=\frac{-r}{2}\cdot\frac{dB}{dt}$; $r\leq R$

for $r>R$: $\oint\vec{E}\cdot\vec{dl}=\frac{-d\varphi_B}{dt} \Rightarrow E.2\pi r=\frac{-d}{dt}(\pi R^2B) \Rightarrow E.2\pi r=-\pi R^2\frac{dB}{dt} \Rightarrow E=\frac{-R^2}{2r}\cdot\frac{dB}{dt}$; $r>R$

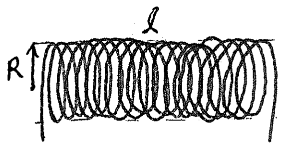
*بخش دوم فصل 32: «خود القایی و مدارهای RL»

نیروی محرکه خود القایی یا ضد نیروی محرکه $\varepsilon_L \propto \frac{di}{dt}$ $\Rightarrow \varepsilon_L=-L\frac{di}{dt}$

$L=\frac{-\varepsilon_L}{\frac{di}{dt}}$ = ضریب خود القایی یا القایدگی

$$\varepsilon_L=-L\frac{di}{dt}=-\frac{d(Li)}{dt} \quad (1) \quad , \quad \varepsilon_L=-N\frac{d\varphi_B}{dt}=\frac{-d(N\varphi_B)}{dt} \quad (2) \quad \xRightarrow{(1),(2)} \quad *L=\frac{N\varphi_B}{i}$$

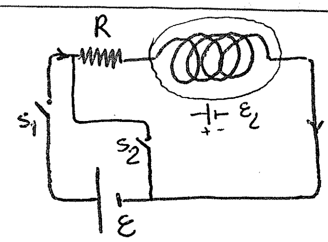
*مثال: ضریب خود القایی یک سیملوله‌ی ایده‌آل که شعاع مقطع آن R (مساحت $A=\pi R^2$)، طول آن l و تعداد کل دور آن N است را بدست آورید.



$$l\gg R \ , \ A=\pi R^2 \ , \ n=\frac{N}{l}$$

$$L=\frac{N\varphi_B}{i}=N\mu_0 nA=\frac{\mu_0 N^2A}{l}$$

$$B=\mu_0 ni \Rightarrow \varphi_B=BA=\mu_0 niA \Rightarrow N\varphi_B=N\mu_0 niA$$



$$\varepsilon - iR - L\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \varepsilon - iR = L\frac{di}{dt} \Rightarrow \int_0^i \frac{di}{\varepsilon - iR} = \int_0^t \frac{dt}{L}$$

$$\left[\frac{-1}{R}\ln(\varepsilon - iR)\right]_0^i = \left[\frac{t}{L}\right]_0^t \Rightarrow \ln\frac{\varepsilon - iR}{\varepsilon} = \frac{-Rt}{L} \Rightarrow \frac{\varepsilon - iR}{\varepsilon} = e^{-\frac{Rt}{L}}$$

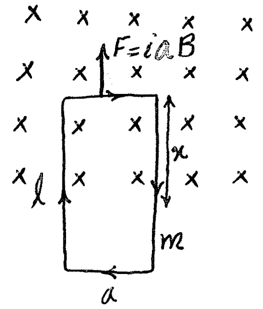
$$\varepsilon - iR = \varepsilon e^{-Rt/L} \Rightarrow i = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right) \Rightarrow$$ پرشدن سیملوله

* پس از اینکه در بخش اول جریان به حالت پایدار رسید، کلید S_2 را بسته و بلافاصله کلید S_1 را قطع می کنیم در این حالت می توان نوشت:

$$-iR - L\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \int_{\varepsilon/R}^i \frac{di}{i} = \int_0^t \frac{-R\,dt}{L} \Rightarrow [\ln i]_{\varepsilon/R}^i = \frac{-Rt}{L} \Rightarrow \ln\frac{i}{\varepsilon/R} = \frac{-Rt}{L}$$

$$\Rightarrow i = \frac{\varepsilon}{R}e^{-Rt/L} \Rightarrow$$ خالی شدن سیملوله

* مسئله 5 هودسون:



B کاملاً درونسوست

$$\vec{\varphi} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$

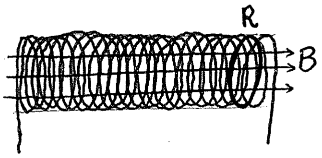
$$\varphi = Bax$$

$$\varepsilon = -N\frac{d\varphi}{dt} = \frac{-d\varphi}{dt} = -Ba\frac{dx}{dt} = -Bav$$

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{-Bav}{R}$$

$$\vec{F} = i\vec{l}\times\vec{B} = iaB = \left(\frac{-Bav}{R}\right)aB = mg \Rightarrow v = \frac{-mgR}{a^2B^2}$$

* مسئله 7 هودسون:



$n = 4000$

$N = 30$

$R = 5cm$

$$\varepsilon = 2mv$$

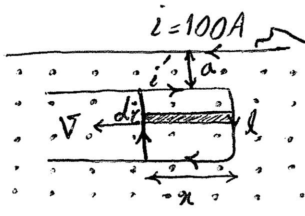
$$\varepsilon = -N\frac{d\varphi_B}{dt} = -N\frac{d}{dt}(BA) = -N\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mu_0 ni\pi R^2\right)$$

$$\varepsilon = \frac{-N}{2}\mu_0 n\pi R^2\frac{di}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{2\varepsilon}{N\mu_0 n\pi R^2} = \frac{2\times 2\times 10^{-3}}{(30)(4\pi\times 10^{-7})(4000)(3{,}14)(0{,}05)^2}$$

* مسئله 35 فصل 26 هالیدی:

سیم نازک بسیار بلند حامل جریان i



$l = 10cm$ و $a = 10mm$

$V = 5 m/s$ و $R = 0{,}4\,\Omega$

$$\varepsilon = -N\frac{d\varphi_B}{dt} = -\frac{d\varphi_B}{dt} = -\frac{\mu_0 iV}{2\pi}\ln\frac{a+l}{a}$$

$$\varphi_B = \int\vec{B}\cdot d\vec{A} = \int B\,dA = \int_a^{a+l}\frac{\mu_0 i}{2\pi r}x\,dr = \frac{\mu_0 ix}{2\pi}\ln\frac{a+l}{a}$$

روی مساحت مورد نظر

$$i' = \frac{-\varepsilon}{R} = \frac{-\mu_0 i v}{2\pi R} \ln \frac{a+l}{a}$$

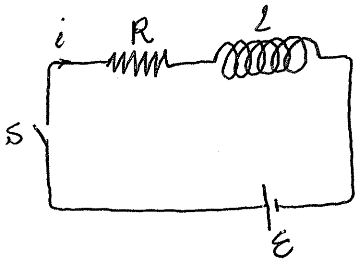
$$P_R = Ri^2 \Rightarrow P_R = \frac{1}{R}\left(\frac{\mu_0 i v}{2\pi} \ln \frac{a+l}{a}\right)^2$$

$$dF = i' B\, dr \Rightarrow F = \int dF = \int_a^{a+l} i' \frac{\mu_0 i}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 i' i}{2\pi} \ln \frac{a+l}{a} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \frac{\mu_0 i v}{2\pi R} \left(\ln \frac{a+l}{a}\right)^2$$

$$P_M = F v = \frac{1}{R}\left(\frac{\mu_0 i v}{2\pi} \ln \frac{a+l}{a}\right)^2$$

* توضیح چند مطلب از بخش مدارهای RL فصل 32:

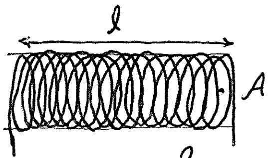
انرژی ذخیره شده در یک القاگر: «U»



$$\varepsilon - iR - L\frac{di}{dt} = 0$$

$$\varepsilon = iR + L\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \varepsilon i = Ri^2 + Li\frac{di}{dt}$$

$$\frac{dU}{dt} = Li\frac{di}{dt} \Rightarrow dU = Li\,di \Rightarrow U = \int_0^i Li\,di = L\left[\frac{1}{2}i^2\right]_0^i \Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2}Li^2}$$



A «مساحت مقطع»

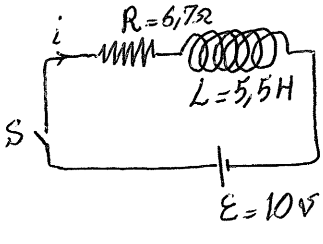
$u_B = \frac{U}{\text{حجم}}$ چگالی حجمی انرژی مغناطیسی

می دانیم که: $n = \frac{N}{l}$ و $L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}$ از طرفی، $B = \mu_0 n i$.

$$u_B = \frac{\frac{1}{2}Li^2}{Al} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 N^2 A}{l}\left(\frac{B}{\mu_0 n}\right)^2}{Al}$$

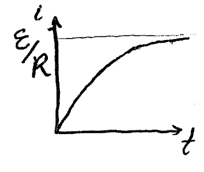
$$u_B = \frac{1}{2}\mu_0 \left(\frac{N}{l}\right)^2 \frac{B^2}{\mu_0^2 n^2} \Rightarrow \boxed{u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

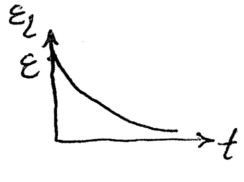
* مسئله 65 فصل 26 هالیدی:



$$\varepsilon - iR - L\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow i = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$

$$\varepsilon_L = -L\frac{di}{dt} = \varepsilon e^{-Rt/L}$$





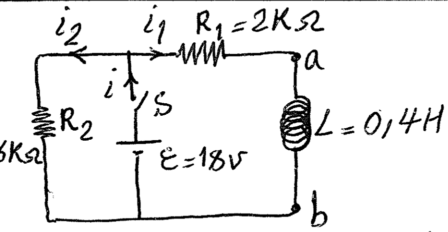
$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{\text{باتری}} = P_{\text{باتری}} = \varepsilon i \Rightarrow w_{\text{باتری}} = \int dw = \int_0^t \varepsilon i\, dt = \int_0^t \frac{\varepsilon^2}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right) dt \Rightarrow w_{\text{باتری}} = U_L + w_R$$

$$U_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L\frac{\varepsilon^2}{R^2}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$

$\tau = \frac{L}{R}$: ثابت زمانی القاگری

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_R = Ri^2 \Rightarrow w_R = \int dw = \int_0^t Ri^2 dt = \int_0^t R\left(\frac{\varepsilon^2}{R^2}\right)\left(1 - e^{-Rt/L}\right)^2 dt$$

* یادآوری: $\tau = RC$: ثابت زمانی خازنی.

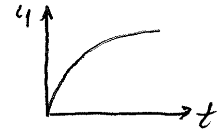


* مسئلهٔ 40 فصل 32 هودسون:

بخش اول: کلید S در لحظهٔ $t=0$ بسته می‌شود. در این حالت پس از بسته شدن کلید جریان هر شاخه را بدست آورید.

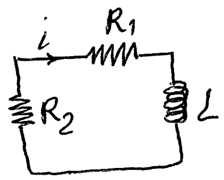
$$\varepsilon - i_2R_2 = 0 \Rightarrow i_2 = \frac{\varepsilon}{R_2} = \frac{18}{6\times10^3} = 3\times10^{-3}\,A$$

$$\varepsilon - i_1R_1 - L\frac{di_1}{dt} = 0 \Rightarrow i_1 = \frac{\varepsilon}{R_1}\left(1-e^{-R_1t/L}\right)$$



بخش دوم: پس از اینکه در بخش اول جریان به حالت پایدار خود می‌رسد، در لحظهٔ $t=0$ کلید S را باز می‌کنیم. در این حالت پس از باز شدن کلید جریان را بدست آورید.

نیروی محرکهٔ خودالقائی دو سر القاگر را در هر لحظهٔ t و در لحظهٔ $t=0$ بدست آورید. کدام سر القاگر مثبت است؟ (a یا b؟)

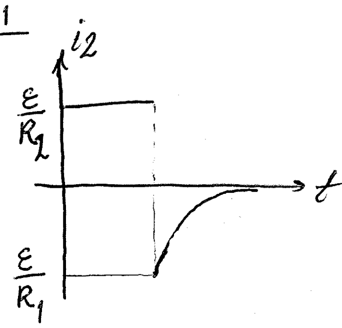


$$-iR_1 - L\frac{di}{dt} - iR_2 = 0 \Rightarrow -L\frac{di}{dt} = i(R_1+R_2)$$

$$\int_{\varepsilon/R_1}^{i}\frac{di}{i} = \int^{t}\frac{-(R_1+R_2)dt}{L} \Rightarrow i = \frac{\varepsilon}{R_1}e^{\frac{-(R_1+R_2)t}{L}}$$

$$\varepsilon_L = -L\frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon(R_1+R_2)}{R_1}e^{\frac{-(R_1+R_2)t}{L}} \xrightarrow{t=0} \varepsilon_L = \frac{\varepsilon(R_1+R_2)}{R_1} = \frac{18(8)}{2} = 72\,v$$

$$\frac{iR_1}{\varepsilon} = e^{\frac{-(R_1+R_2)t}{L}} \Rightarrow -\left(\frac{R_1+R_2}{L}\right)t = \ln\frac{iR_1}{\varepsilon} \Rightarrow t = \frac{-L}{R_1+R_2}\ln\frac{iR_1}{\varepsilon}$$



$$t = \frac{-0/4}{8\times10^3}\ln\frac{(2\times10^{-3})(2\times10^3)}{18}\,s$$

« The End »