بسم الله الرحمن الرحیم

فیزیک 2 :

کتاب درسی : فیزیک دانشگاهی جلد سوم (الکتریسیته و مغناطیس)

تألیف : آلوین هودسون - رکس نلسون

انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان

برنامه درسی : فصل های 24 تا 35

مراجع دیگر : تمامی کتابهای فیزیک پایه : اصول فیزیک ویرایش نهم ، جلد 2 تألیف هالیدی

فصل اوّل (بخش اول فصل 24 کتاب درسی) : بار الکتریکی و ماده - قانون کولن - الکتریسیته و مغناطیس

چند تعریف ساده :

فیزیک : شناخت نیروی بنیادی طبیعت و تعیین قوانین حاکم بر آنها

← همه‌ی عناصر طبیعت از اتم که ساخته شده اند ، اتم که خود از هسته و مدار چرخش الکترون تشکیل شده اند .

شعاع اتم که در رابطه با انگستروم است . $1A^\circ = 10^{-10} m$

شعاع هسته اتم با $1F = 10^{-15} m$ اندازه گیری می شود .

نیروهای وارده در یک اتم :

1. نیروی گرانشی
2. نیروی الکترومغناطیس
3. نیروی هسته ای

$A = N + Z$ ← عدد جرمی ، N : تعداد نوترونها ، Z : تعداد پروتونها = تعداد الکترونها

★ منشاء اصلی نیروی الکتریکی و منشاء اصلی نیروی مغناطیسی همان بار الکتریکی است .

★ بار الکتریکی بر دو نوع است : ⊕ و ⊖

★ بار الکتریکی کوانتیده است مقدارش پیوسته نیست

★ بار الکتریکی پایسته است .

بار یک الکترون

$1e = 1{,}6 \times 10^{-19} C$

رسانا ها و نارسانا ها (دی الکتریک ها یا عایق ها) :

insulatory , conductory

بار الکتریکی در رسانا به راحتی حرکت می کند .

★ $R = \rho \frac{l}{A}$ ← ρ : مقاومت ویژه

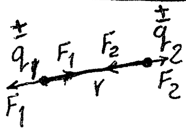
$\sigma = \frac{1}{\rho}$ رسانندگی

★ فلزات $\rho = 10^{-8}$

★ شیشه $\rho = 10^{+13}$

فیزیک 2 :

*قانون کولن:

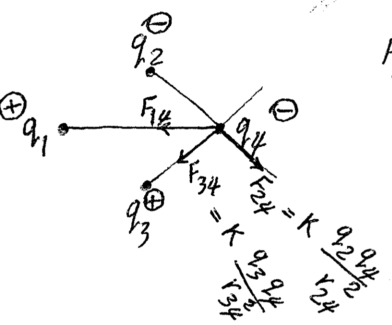


$q = ne$ $\star K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ $\star K = 9\times10^9 \ N.m^2/c^2$ ، $F = K\frac{q_1 q_2}{r^2}$

$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi K} = 8.85\times10^{-12} \ c^2/N.m^2$ ، $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{q_1 q_2}{r^2}$

ε_0 گذردهی خلاء
ضریب

$\star F_2 = F_1 = F = K\frac{q_1 q_2}{r^2}$

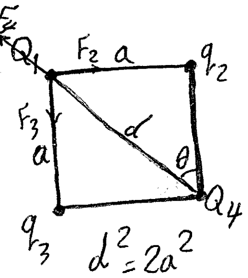


$F_{14} = K\frac{q_1 q_4}{r_{14}^2}$

$$\star \vec{F_4} = \vec{F_{14}} + \vec{F_{24}} + \vec{F_{34}}$$

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} \Rightarrow \begin{cases} \vec{F_1} = F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j} + F_{1z}\vec{k} \\ \vec{F_2} = F_{2x}\vec{i} + F_{2y}\vec{j} + F_{2z}\vec{k} \\ \vec{F_3} = F_{3x}\vec{i} + F_{3y}\vec{j} + F_{3z}\vec{k} \end{cases}$$

(8-17) فیزیک هالیدی ویرایش 8: رابطه بین q و Q را چنان بدست آورید که نیروی برایند وارد بر هر Q صفر شود.

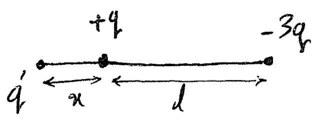


اولاً لازم است q و Q مختلف العلامه باشند.

$$\begin{cases} F_2 = K\frac{qQ}{a^2} \Rightarrow \vec{F_2} = F_2\vec{i} \\ F_3 = K\frac{qQ}{a^2} \Rightarrow \vec{F_3} = -F_3\vec{j} \\ F_4 = K\frac{Q^2}{2a^2} \Rightarrow \vec{F_4} = -F_4\sin\theta\,\vec{i} + F_4\cos\theta\,\vec{j} = \frac{-\sqrt{2}}{2}F_4\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}F_4\vec{j} \end{cases}$$

$$F = \underbrace{(F_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}F_4)}_{\text{صفر}}\vec{i} + (-F_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}F_4)\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} F_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}F_4 \\ K\frac{qQ}{a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}K\frac{Q^2}{2a^2} \Rightarrow \boxed{q = \frac{\sqrt{2}}{4}Q \ , \ Q = 2\sqrt{2}q} \end{cases}$$

(15-17) محل بار سوم q' را چنان پیدا کنید که نیروی برایند وارد بر q' صفر شود.



$q = 1\mu c$

$$\frac{Kqq'}{x^2} = \frac{K(-3q)(q')}{(l+x)^2} \Rightarrow 3x^2 = (l+x)^2 \Rightarrow \sqrt{3}x = \pm(l+x) \overset{①}{\Rightarrow} \sqrt{3}x = -l-x \Rightarrow \sqrt{3}x + x = -l \Rightarrow \cancel{x = \frac{-l}{1+\sqrt{3}}}$$

$$② \ \sqrt{3}x = l+x \Rightarrow \sqrt{3}x - x = l \Rightarrow x(\sqrt{3}-1) = l \Rightarrow x = \frac{l}{\sqrt{3}-1} = \frac{10}{0.7}$$

تمرین: محل و بزرگی بار سوم q' را چنان پیدا کنید که نیروی برایند وارد بر کل دستگاه صفر شود.

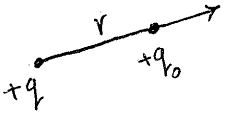
+ (54-17) هالیدی

*میدان الکتریکی (Electric Field):

بنا به تعریف شدت میدان الکتریکی در یک نقطه از فضا برابر است با نیرویی که بر واحد بار مثبت در آن نقطه وارد می آید. بنابراین اگر نیروی وارد بر یک بار آزمون مثبت q_0 در یک نقطه برابر F باشد، می توان گفت شدت میدان در آن نقطه چنین است.

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}$$

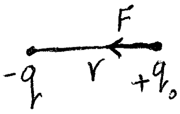
*مثال: بار نقطه ای $+q$ مفروض است. داریم:



$$F=K\frac{qq_0}{r^2} \Rightarrow \frac{F}{q_0}=K\frac{q}{r^2} \Rightarrow E=\frac{Kq}{r^2}$$

میدان به سمت خارج بار

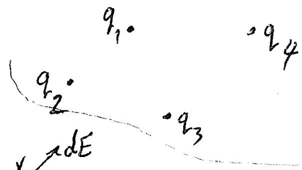
بار نقطه ای $-q$ مفروض است.



$$F=K\frac{qq_0}{r^2} \Rightarrow E=\frac{F}{q_0}=K\, q/r^2$$

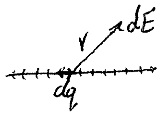
میدان به سمت داخل بار

برای یک توزیع ناپیوسته بار داریم:



$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3+\vec{E}_4 \Rightarrow *\vec{E}=\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i$$

و برای یک توزیع پیوسته بار داریم:

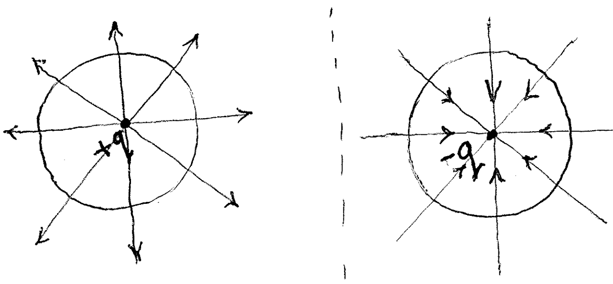


$$dE=K\frac{dq}{r^2} \Rightarrow *\vec{E}=\int d\vec{E}$$

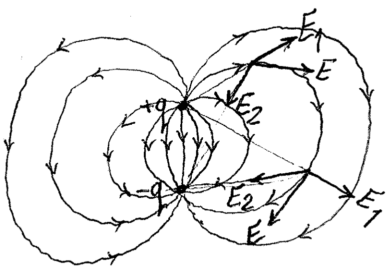
*خطوط میدان (یا نیروی) الکتریکی:

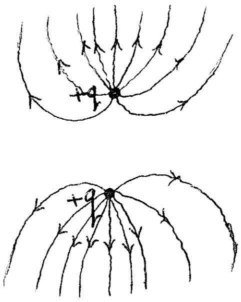
۱) تعداد این خطوط در هر ناحیه نشانگر شدت میدان در آن ناحیه است.

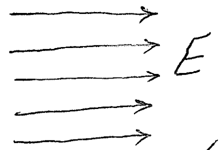
2) مماس بر خط میدان، در هر نقطه، $\vec{E}$ را در آن نقطه مشخص می کند.



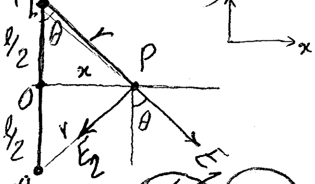
*نکته: یک میدان یکنواخت را توسط خطوط موازی و متساوی الفاصله نمایش می دهیم.







*مثال دوقطبی الکتریکی: در دوقطبی الکتریکی شکل روبرو مطلوبست: E_q ؟



$$E_1=E_2=\frac{Kq}{r^2}$$

$P=ql$ گشتاور دوقطبی الکتریکی

$$E_{1x}=E_1\sin\theta \qquad E_{1y}=-E_1\cos\theta$$

$$E_{2x}=-E_2\sin\theta \qquad E_{2y}=-E_2\cos\theta$$

$$\Rightarrow E_x=E_{1x}+E_{2x}=0$$

$$E_y=E_{1y}+E_{2y}=-E_1\cos\theta-E_2\cos\theta=-2E_1\cos\theta=-2K\frac{q}{r^2}\cos\theta$$

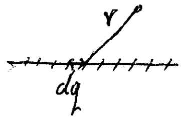
$$\cos\theta=\frac{l/2}{r}=\frac{l}{2r} \Rightarrow E_y=-2K\frac{q}{r^2}\cdot\frac{l}{2r}=-K\frac{ql}{(l^2/4+x^2)^{3/2}}=-K\frac{P}{(l^2/4+x^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \vec{E}=\frac{-KP}{(l^2/4+x^2)^{3/2}}$$

فیزیک ۲:

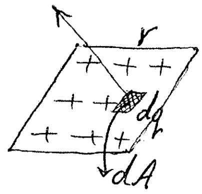
λ چگالی خطی بار یا بار در واحد طول $\lambda = \dfrac{dq}{dl} \Rightarrow \underbrace{dq = \lambda dl}_{\text{کل بار است.}} \Rightarrow \int dq = \int \lambda dl \Rightarrow q = \int \lambda dl =$ { اگر λ ثابت $q = \lambda \int dl$ ؛ در حالت خاص $q = \lambda l$ }

1) توزیع خطی «λ»: میدان حاصل از توزیع کل پیوسته بار



$$dE = K\frac{dq}{r^2} \Rightarrow \vec{E} = \int d\vec{E}$$

2) توزیع سطحی «σ»:

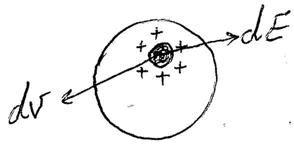


σ چگالی سطحی بار یا بار در واحد سطح

ρ چگالی حجمی بار یا بار در واحد حجم

$$dq = \sigma dA \Rightarrow \int dq = \int \sigma dA \xrightarrow{\text{اگر } \sigma \text{ ثابت}} \boxed{q = \sigma A}$$

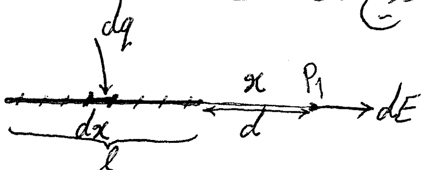
3) توزیع حجمی «ρ»:



$$dq = \rho dv \Rightarrow q = \int \rho dv \xrightarrow{\text{اگر } \rho \text{ ثابت}} \boxed{q = \rho V}$$

مثال 1: بار الکتریکی کل $+q$ به طور یکنواخت روی یک میله نازک و نارسانای به طول l توزیع شده است.

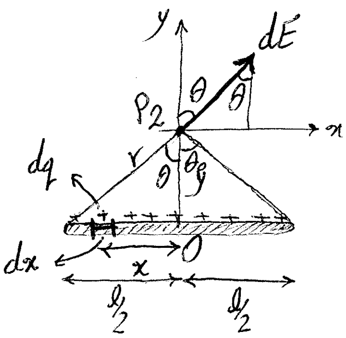
الف) $\vec{E}$ را در نقطه P_1 واقع در امتداد میله و به فاصله d از یک سر میله بدست آورید.



$$dE = K\frac{dq}{x^2} \Rightarrow E = \underbrace{\int dE}_{\text{روی کل بار}} = \int K\frac{dq}{x^2} = \underbrace{\int K\frac{\lambda dx}{x^2}}_{\text{روی کل میله}} \Rightarrow E = K\lambda\int_d^{d+l}\frac{dx}{x^2} = K\lambda\left[\frac{-1}{x}\right]_d^{d+l}$$

$$E = K\lambda\left[\frac{-1}{d+l} + \frac{1}{d}\right] \Rightarrow \text{به سمت راست} \quad E = K\lambda\left[\frac{1}{d} - \frac{1}{d+l}\right] = \frac{Kq}{l}\left[\frac{1}{d} - \frac{1}{d+l}\right]$$

2*: بار الکتریکی q به طور یکنواخت روی یک میله نارسانای نازک به طول l توزیع شده است. مطلوبست $\vec{E}$ در نقطه P_2 واقع بر عمود منصف میله و به فاصله y از میله؟



$$dE = K\frac{dq}{r^2} \qquad dq = \lambda dx$$

$$\star\ dx = \frac{y}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$E_x = \int dE_x = \int dE\sin\theta = 0$$

$$E_y = \int dE_y = \int dE\cos\theta = \underbrace{\int K\frac{dq}{r^2}\cos\theta}_{\text{روی کل بار}}$$

مشتق گیری: $\begin{cases} x = y\tan\theta \\ dx = y(1+\tan^2\theta)d\theta = \dfrac{y}{\cos^2\theta}d\theta \end{cases}$

$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{y}{r} \Rightarrow r = \dfrac{y}{\cos\theta} \\ \tan\theta = \dfrac{x}{y} \end{cases} \qquad \lambda = \dfrac{q}{l}$

$$E_y = K\lambda\underbrace{\int\frac{dx}{r^2}\cos\theta}_{\text{روی کل میله}} = K\lambda\int\frac{\frac{y}{\cos^2\theta}d\theta}{\frac{y^2}{\cos^2\theta}}\cos\theta$$

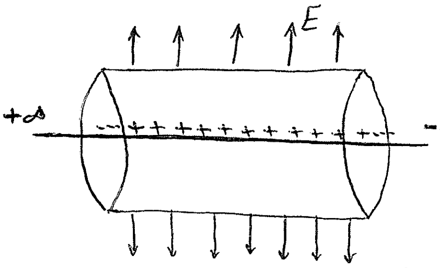
$$E_y = \frac{K\lambda}{y}\int_{-\theta_0}^{+\theta_0}\cos\theta d\theta = \frac{K\lambda}{y}\left[\sin\theta\right]_{-\theta_0}^{+\theta_0} = \frac{K\lambda}{y}\left[\sin\theta_0 - \sin(-\theta_0)\right] = \frac{2K\lambda}{y}\sin\theta_0$$

$$\sin\theta_0 = \frac{l/2}{\sqrt{y^2 + \frac{l^2}{4}}}$$

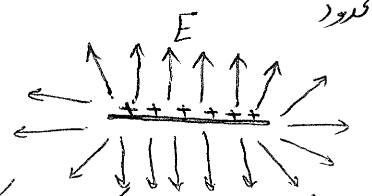
$$E_y = \frac{2K\lambda}{y}\times\frac{l/2}{\sqrt{y^2 + l^2/4}} = \frac{K\lambda}{y}\times\frac{l}{\sqrt{y^2 + l^2/4}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\times\frac{l}{\sqrt{4y^2 + l^2}} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 y\sqrt{4y^2 + l^2}}$$

مثال: یک میله به طول ∞ و چگالی خطی بار λ ثابت مفروض است. E را در فاصله y از میله بدست آورید.
هرگاه به روش مثال قبل مسئله را حل کنیم خواهیم داشت،

$$E=\frac{2K\lambda}{y}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}$$

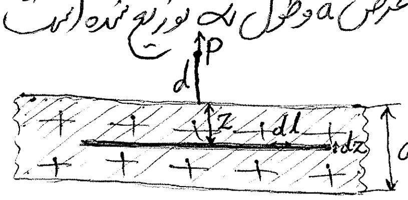


برای خط بار ∞



برای میله محدود

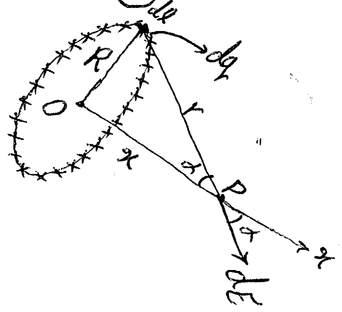
مسئله 40 فصل 24 هودیوت: بار الکتریکی با چگالی سطحی ثابت σ روی سطح یک صفحه نازک و نارسانای به عرض a و طول ∞ توزیع شده است. E را در نقطه P به فاصله d از لبه بالائی صفحه بدست آورید. (P و صفحه باردار هر دو در یک صفحه‌اند)



$$\lambda=\sigma\, dz \qquad dl\times dz=dA$$

$$E=\int dE=\int_0^a\frac{\sigma\, dz}{2\pi\varepsilon_0(d+z)}=\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\Big[\ln(d+z)\Big]_0^a=\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\Big[\ln(d+a)-\ln d\Big]\Rightarrow E=\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d+a}{d}$$

مثال: (حلقه باردار) بار کل q به طور یکنواخت روی یک حلقه دایره‌ای شکل به شعاع R توزیع شده است. E را در نقطه P واقع بر محور حلقه و به فاصله x از مرکز حلقه بدست آورید.



$$dq=\lambda\, dl \qquad \cos\alpha=\frac{x}{r}$$

$$dE=K\frac{dq}{r^2} \qquad r^2=x^2+R^2$$

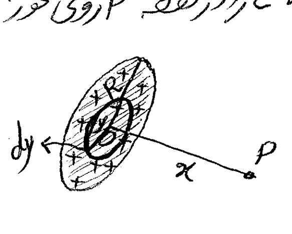
$$E_x=\int dE_x=\int dE\cos\alpha=\int_{\text{روی کل بار}} K\frac{dq}{r^2}\cos\alpha=\frac{K\cos\alpha}{r^2}\int dq=\frac{Kq\cos\alpha}{r^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_x=K\frac{qx}{(x^2+R^2)^{3/2}}}$$

$$E_y=\int dE_y=\int ------=0$$

$$E_z=\int dE_z=\int ------=0$$

مثال صفحه باردار: بار الکتریکی با چگالی سطحی ثابت σ روی یک صفحه دایره‌ای به شعاع R توزیع شده است. E را در نقطه P روی محور صفحه و به فاصله x از آن صفحه بدست آورید.



$$E_{\text{کل}}=\int dE=\int_0^R K\frac{\sigma 2\pi y\, dy\, x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad / \quad \cos\alpha=\frac{x}{r}$$

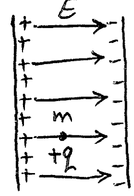
$$\text{بار حلقه}=\sigma 2\pi y\, dy$$

$$E_{\text{کل}}=K\sigma 2\pi x\int_0^R\frac{y\, dy}{(y^2+x^2)^{3/2}}=\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{\sqrt{y^2+x^2}}\right]_0^R=\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{\sqrt{R^2+x^2}}+\frac{1}{x}\right]$$

$$\boxed{E_{\text{کل}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right]}$$

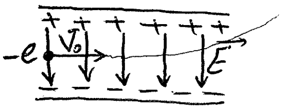
$$\text{for } x\ll R:\ E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

بررسی حرکت یک ذرهٔ باردار در یک میدان الکتریکی (خارجی):



$$\vec{F}=\vec{E}q=m\vec{a} \Rightarrow \vec{a}=\vec{E}q/m \Rightarrow \vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow V=\int a\,dt$$

$$\begin{cases} V=at=\dfrac{q\vec{E}}{m}t \\ x=\dfrac{1}{2}at^2=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\vec{E}q}{m}t^2 \end{cases}$$

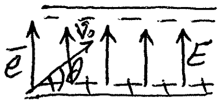


$$q=-e$$

$$F=e\vec{E}=ma \Rightarrow a_y=\frac{eE}{m} \Rightarrow V=a_y t=eE/m\,t$$

$$x=V_0 t \Rightarrow y=\frac{1}{2}a_y t^2 \Rightarrow y=\frac{1}{2}\times\frac{eE}{m}t^2 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}\times\frac{eE}{m}\times\frac{x^2}{V_0^2}}$$

مسئله 86 فصل 18 کتاب هالیدی ویرایش هشتم:



$$\vec{F}=\vec{E}q$$

به سمت پایین $F=eE=ma \Rightarrow a_y=\dfrac{eE}{m}$

$$\begin{matrix} V_{0x}=V_0\cos\theta \\ V_{0y}=V_0\sin\theta \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x=V_0\cos\theta\, t \\ y=V_0\sin\theta\, t-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{eE}{m}t^2=\dfrac{V_0\sin\theta . x}{V_0\cos\theta}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{eE}{m}\times\dfrac{x^2}{V_0^2\cos^2\theta} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} t=\dfrac{V_0\sin\theta}{\frac{eE}{m}} \\ V_y=V_0\sin\theta-\dfrac{eE}{m}t \end{cases}$$

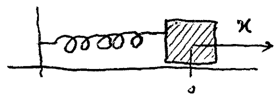
$$\star\; y=x\tan\theta-\frac{eE\,x^2}{2mV_0^2\cos^2\theta}$$

مربوط به فیزیک 1

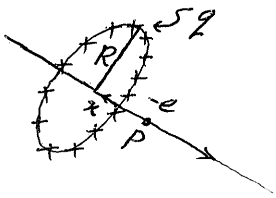
حرکت هماهنگ ساده:

$$F=-Kx \Rightarrow ma=-Kx \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2}=-Kx \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{-K}{m}x$$

$$x=A\sin wt,\ w^2=\frac{K}{m} \Rightarrow x=A\sin\sqrt{\frac{K}{m}}\,t$$



مسئله 76 فصل 18 هالیدی: برای میدان حلقه در یک نقطهٔ P روی محور بدست آورید.



ذره e- در امتداد محور عمود بر مرکز یک حلقه باردار به شعاع R با x<<R مقید شده است. نشان دهید نیروی الکترو استاتیکی، الکترون را با بسامد W نوسان می دهد.

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{qx}{(x^2+R^2)^{3/2}} \xrightarrow{\text{for } x<<R} E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{qx}{R^3}$$

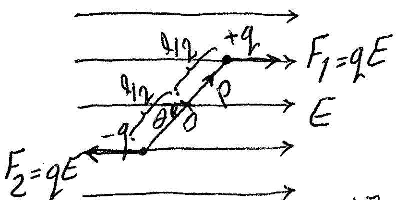
$$F=-e\vec{E}=\frac{-eqx}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

مثل حرکت هماهنگ ساده

$$w=\sqrt{\frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 mR^3}}$$

*حرکت یک دوقطبی الکتریکی در یک میدان الکتریکی (خارجی یکنواخت):

مثال: مطابق شکل یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور $P=ql$ به گونه‌ای در میدان خارجی یکنواخت E وارد شده که بردار E با P زاویهٔ θ می سازد. حرکت آن را بررسی کنید.

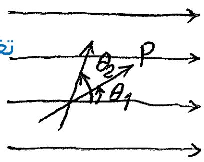


$$\vec{F}_{کل}=\vec{F}_1+\vec{F}_2=0$$ وارد بر دوقطبی

$$\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F} \Rightarrow \begin{cases}\tau_1=(\frac{l}{2})(qE)\sin\theta \\ \tau_2=(\frac{l}{2})(qE)\sin\theta\end{cases} \Rightarrow \tau=\tau_1+\tau_2=qlE\sin\theta=PE\sin\theta$$

گشتاور نیرو $\vec{\tau}=\vec{P}\times\vec{E}$

کار انجام شده توسط میدان



$$W=\int dW=\int \tau d\theta=\int PE\sin\theta d\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2} PE\sin\theta d\theta=PE\left[-\cos\theta\right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$\Delta U=W=-PE\left[\cos\theta_2-\cos\theta_1\right]$$ تغییر انرژی پتانسیل

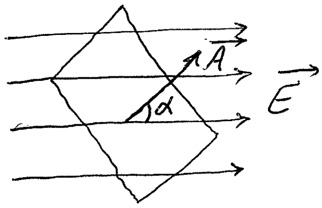
$$\text{if } \theta_1=\frac{\pi}{2},\ \theta_2=\theta \Rightarrow \Delta U=W=-PE\cos\theta=-\vec{P}\cdot\vec{E}$$

«قانون گاوس»

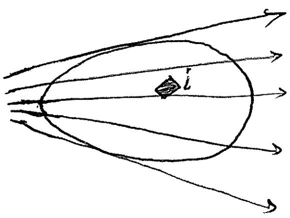
*فصل 25 (کتاب هودسون)

شار (فلوی) الکتریکی : Electeric flux

$$\star\ \varphi=\vec{E}\cdot\vec{A} \Rightarrow \varphi=E.A\cos\alpha$$



$$\begin{cases}\text{for } \alpha=0 \Rightarrow +\varphi_{max} \\ \text{for } \alpha=\pi/2 \Rightarrow \varphi=0 \\ \text{for } \alpha=\pi \Rightarrow -\varphi_{max}\end{cases}$$

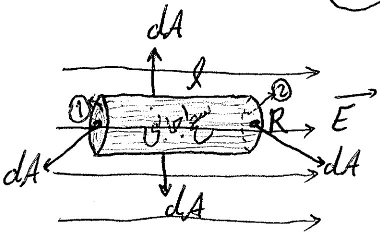


$$\Delta\varphi_i=\vec{E_i}\cdot\Delta\vec{A_i}$$

$$\varphi=\Sigma\Delta\varphi_i=\lim_{\Delta A\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{E_i}\cdot\Delta\vec{A_i}$$

$$\star\ \varphi=\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}$$ روی سطح مورد نظر $\Rightarrow$ شار الکتریکی روی سطح بسته

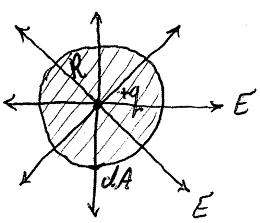
مثال : در شکل زیر شار عبوری میدان E را از سطح بسته‌ی استوانه‌ای شکل نشان داده شده به دست آورید.



$$\varphi=\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=\underbrace{\int\vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\text{قاعده 1}}+\underbrace{\int\vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\text{قاعده 2}}+\underbrace{\int\vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\text{سطح جانبی}}=\int EdA\cos\pi+\int EdA\cos 0+\int EdA\cos\frac{\pi}{2}$$

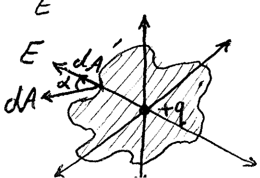
$$=-E(\pi R^2)+E(\pi R^2)+0=0$$

مثال : بار نقطه‌ای $+q$ را در مرکز یک سطح بسته‌ی کروی شکل به شعاع R در نظر بگیرید و شار عبوری میدان E را از این سطح بسته‌ی کروی شکل حساب کنید.



$$\varphi=\oint_{\text{کره}} E.dA=\oint EdA\cos 0=\oint k\frac{q}{R^2}dA=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{q}{R^2}\underbrace{\oint dA}_{4\pi R^2}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\varphi=\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$



$$\varphi_E=\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}$$

اگر سطح کروی نباشد هم به همان نتیجه‌ی فوق می‌رسیم.

فیزیک 2 :

چون متناسب با خطوط گذرنده از سطح است با سطح کره فرقی ندارد

جمع جبری بارهایی که توسط سطح بسته‌ی مفروض احاطه شده اند.

$$\oint E_2 \cdot dA = q_2/\varepsilon_0$$

$$\oint (E_1 + E_2 + \cdots + E_n) \cdot dA = \frac{q_1 + q_2 + \cdots + q_n}{\varepsilon_0}$$

$$* \oint E \cdot dA = \frac{q_{net}}{\varepsilon_0}$$

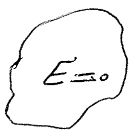
قانون گاوس

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{net}$$

جمع جبری بارهایی که داخل سطح بسته‌ی مفروض واقع شده اند.

*رساناها و قانون گاوس: با استفاده از قانون گاوس می توان نشان داد در یک رسانای با بار خالص غیر صفر بارهای داده شده در حالت تعادل الکترواستاتیکی روی سطح خارجی جسم قرار می گیرند. 1

جسم رسانا توپر



جسم بدون بار

2- میدان همیشه در داخل صفر است

3- میدان درست بیرون از سطح، عمود بر سطح است و بزرگی آن $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ است σ که چگالی بار روی سطح است

4- اگر شکل نامنظم باشدچگالی بار، جایی که شعاع انحنای کوچکتری دارد حداکثر است.

تنها در موارد تقارن می توان از قانون گاوس برای محاسبه‌ی میدان استفاده کرد.

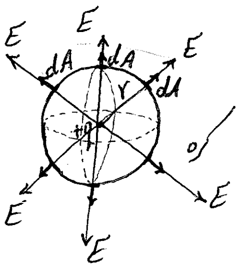
این موارد را می توان به سه دسته‌ی کلی تقسیم کرد:

1) در موارد تقارن کروی *

2) در موارد تقارن استوانه ای

3) در مواردی که بار روی صفحات بزرگ رسانا و نارسانا توزیع شده باشد.

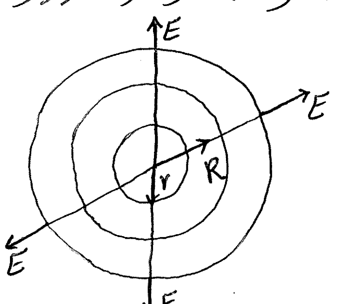
مثال* 1-1 : بار نقطه ای $+q$ مفروض است. با استفاده از قانون گاوس $\vec{E}$ را در فاصله‌ی r از این بار بدست آورید.



$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{in} \Rightarrow \varepsilon_0 \oint E\, dA \cos 0 = q \Rightarrow \varepsilon_0 E \int dA = q$$

$$\varepsilon_0 E \cdot 4\pi r^2 = q \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q}{r^2}$$

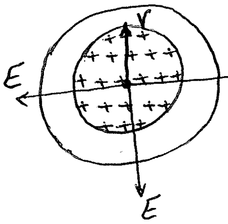
مثال* 1-2 : بار کل $+q$ بطور یکنواخت روی سطح یک پوسته‌ی کروی به شعاع R توزیع شده است. فاصله‌ی هر نقطه دلخواه را تا مرکز کره r بگیرید و E را برای نواحی $r>R$ و $r<R$ بدست آورید.



$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{in}$$

$$\varepsilon_0 \oint E\, dA \cos 0 = q \Rightarrow \varepsilon_0 E \oint dA = q \Rightarrow \varepsilon_0 E\, 4\pi r^2 = q$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q}{r^2} \quad ; r>R \qquad R>r \Rightarrow E=0$$



مثال 1-3 : بار کل q+ به طور یکنواخت در سراسر حجم یک کره نارسانا به شعاع R توزیع شده است. E را در نقاط r<R ، r=R و r>R بدست آورید.

*for: $r>R$

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{in} \Rightarrow \varepsilon_0 E\, 4\pi r^2 = q \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q}{r^2} \qquad r>R \text{ یا } E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

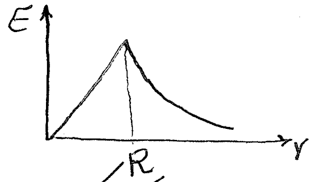
$$dq = \rho\, dv \Rightarrow q = \int \rho\, dv \xrightarrow[\rho\ \text{cte}]{\text{if}} q = \rho V = \rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) \Rightarrow \rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

*for $r<R$

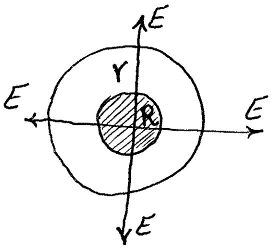
$$\varepsilon_0 \int \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{in} \Rightarrow \varepsilon_0 E\, 4\pi r^2 = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = \frac{q r}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \qquad r<R$$

*for $r=R$

$$E = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$



مثال 1-4 : بار الکتریکی با چگالی حجمی متغیر $\rho = Br^2$ در سراسر حجم یک کره نارسانای به شعاع R توزیع شده است. E را در نقاط r<R ، r=R و r>R بدست آورید.



*for $r>R$

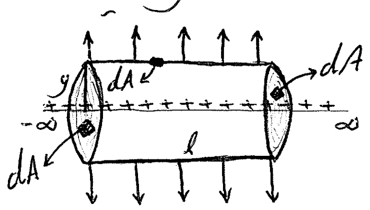
$$\Rightarrow \varepsilon_0 \oint \vec{E}\, d\vec{A} = q_{in} \Rightarrow \varepsilon_0 E\, 4\pi r^2 = \int \rho\, dv = \int_0^R Br^2 \cdot 4\pi r^2 dr$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 E\, 4\pi r^2 = \frac{4\pi B R^5}{5} \Rightarrow E = \frac{BR^5}{5\varepsilon_0 r^2} \quad : r>R$$

*for $r<R \Rightarrow \varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{in} \Rightarrow \varepsilon_0 E\, 4\pi r^2 = \int \rho\, dv = \int_0^r Br^2 4\pi r^2 dr \Rightarrow E = \frac{Br^3}{5\varepsilon_0} \quad : r<R$

*for $r=R \Rightarrow E = \frac{BR^3}{5\varepsilon_0}$

مثال 2-1 : (مثال‌هایی با تقارن استوانه‌ای) یک خط بار بینهایت دارای بار با چگالی طولی ثابت λ می‌باشد، E را در فاصله y از این خط بدست آورید.



$$\varepsilon_0 \left[\cancel{\underbrace{\int \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\text{قاعده}}} + \cancel{\underbrace{\int \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\text{قاعده}}} + \underbrace{\int \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\text{سطح جانبی}} \right] = \lambda l$$

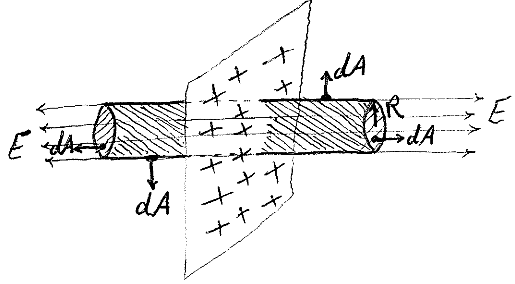
$$\Rightarrow \int_{\text{سطح جانبی}} E\cdot dA \cos 0 = E \int dA \Rightarrow \varepsilon_0 E\,[2\pi y l] = \lambda l \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}$$

فیزیک:

مسائل قانون گاوس: فصل 25 هودسون ← 5 - 15 - 20

فصل 19 هالیدی ← 15 - 36 - 37 - 51

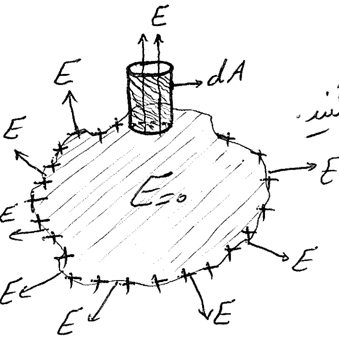
برای محاسبه، یک استوانه فرضی را به صورت زیر درنظر می گیریم



مثال 3-1: بار الکتریکی با چگالی سطحی ثابت σ روی سطح یک صفحهٔ نازک و نارسانای با ابعاد بسیار بزرگ توزیع شده است. E را در یک نقطهٔ مقابل این صفحه بدست آورید.

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{in} \Rightarrow \varepsilon_0 \Big[\underbrace{\int \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\text{قاعده}} + \underbrace{\int \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\text{قاعده}} + \underbrace{\int \cancel{\vec{E}\cdot d\vec{A}}}_{\text{سطح جانبی}} \Big] = \sigma A$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 E.A + \varepsilon_0 EA + 0 = \sigma A \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



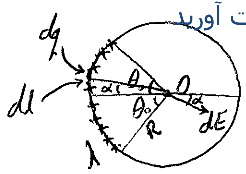
مثال 3-2: بار الکتریکی روی سطح یک رسانا توزیع شده است. E را در یک نقطهٔ نزدیک به سطح رسانا حساب کنید. فرض کنید چگالی سطحی بار در آن ناحیه σ است.

$$\varepsilon_0 \oint E \cdot dA = q_{in}$$

$$\varepsilon_0 \Big[\underbrace{\int \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\text{قاعده}} + \underbrace{\int \cancel{\vec{E}\cdot d\vec{A}}^{\,0}}_{\text{قاعده}} + \underbrace{\int \cancel{\vec{E}\cdot d\vec{A}}^{\,0}}_{\text{سطح جانبی}} \Big] = \sigma A \qquad \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

مسئله 20 فصل 24 هودسون:

یک بار یکنواخت مثبت با چگالی λ بر واحد طول روی یک نارسانا به صورت شکل است، میدان را در مرکز منحنی به دست آورید



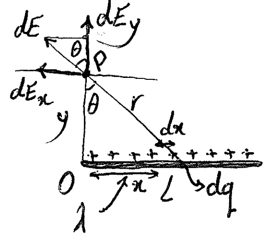
$$dE = k\frac{dq}{R^2} \qquad dq = \lambda dl \qquad dl = R d\alpha$$

$$E_x = \int dE_x = \int dE\cos\alpha = \int k\frac{dq}{R^2}\cos\alpha \;/\; E_y = \int dE_y = \int dE\sin\alpha = \int k\frac{dq}{R^2}\sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow E_x = \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} k\frac{\lambda R d\alpha}{R^2}\cos\alpha = \frac{k\lambda}{R}\int_{-\theta_0}^{+\theta_0}\cos\alpha\, d\alpha = \frac{k\lambda}{R}\Big[\sin\theta_0\Big]_{-\theta_0}^{+\theta_0} = \frac{k\lambda}{R}\Big[\sin\theta_0 - \sin(-\theta_0)\Big] = \frac{2k\lambda}{R}\sin\theta_0$$

مسئله 35 فصل 24 هودسون:

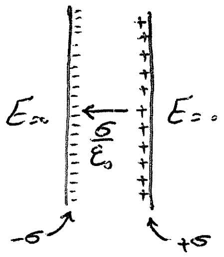
مؤلفه های x و y میدان را در نقطه p بدست آورید



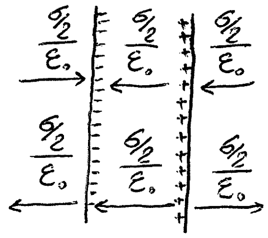
$$dE = k\frac{dq}{r^2} \qquad \sin\theta = \frac{x}{r}, \; \cos\theta = \frac{y}{r}$$

$$\begin{cases} E_x = \int dE_x = -\int dE\sin\theta = -\int k\frac{\lambda dx}{r^2}\sin\theta = -k\lambda\int_0^{l}\frac{x\,dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = -k\lambda\Big[\frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big]_0^{l} = -k\lambda\Big[\frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{l^2+y^2}}\Big] \\ E_y = \int dE_y = \int dE\cos\theta = \int k\frac{\lambda dx}{r^2}\cos\theta = k\lambda y\int_0^{l}\frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = k\lambda y\Big[\frac{1}{y^2}\times\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big]_0^{l} = \frac{k\lambda}{y}\Big[\frac{l}{\sqrt{l^2+y^2}}\Big] \end{cases}$$

مسئله 37 فصل 19 هالیدی:



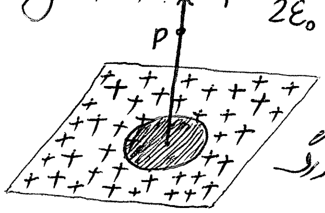
صفحات نازک و رسانای با ابعاد بسیار بزرگ



مسئله 36 فصل 19 هالیدی: σچگالی بار، مبدأ محور محور z بر مرکز حفره است.

فرض می کنیم یک صفحه نا محدود با چگالی بار σ و یک دایره با چگالی بار σ− داریم

$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ مربوط به صفحه کامل



صفحه نازک و نارسانای با ابعاد بزرگ

$E_{کل} = \vec{E_1} - \vec{E_2}$

مربوط به صفحه کامل / مربوط به صفحه دایره ای شکل

$\vec E = \vec{E_1} + \vec{E_2} = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\hat k + \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\hat k$

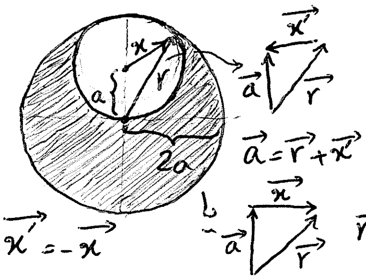
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right]_0^z \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}$$

صفر تا z (فاصله نقطه تا محور)

مسئله 20 فصل 25 هودرون:

کره نارسانا با شعاع 2aکه بار یکنواخت ρ روی آن وجود دارد یک کره به شعاع a از داخل آن در آورده شده است. نشان دهید که $E_x = 0, E_y = \frac{\rho a}{3\varepsilon_0}$ در درون حفره ثابت است.

برای نقطه فرضی وسط حفره میدان ناشی از بار مثبت کره و بار منفی کره کوچک را با هم جمع می کنیم.

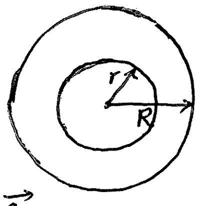


$\vec a = \vec r + \vec{x'}$

$\vec{x'} = -\vec x$

یا

$\vec r - \vec x = \vec a$



یادآوری:

$\varepsilon_0 \oint \vec E\cdot d\vec A = q_{in}$

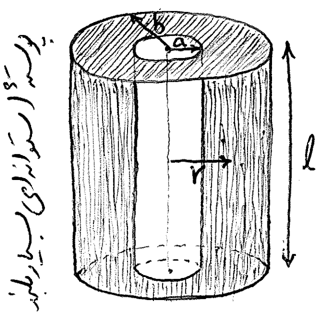
$\varepsilon_0 E \cdot 4\pi r^2 = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$

$$\vec E_{کل} = \vec E_{کامل} - \vec E_{حفره} \Rightarrow \vec E_{کل} = \frac{\rho\vec r}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho\vec x}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec r - \vec x) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec a$$

الف) k ثابتی است در واحد si ، واحد آن را بیابید

در سؤال زیر چگالی یکنواخت نیست و با شعاع نسبت عکس دارد.

مسئله 15 فصل 25 هودرون:



$\rho = \frac{k}{r}$ الف) $k = r\rho = [l]\times\frac{C}{l^3} = \frac{C}{l^2} = \frac{بار}{سطح}$

$V = \pi r^2 l$

$dV = 2\pi r l dr$

$dq = \rho dv \Rightarrow q = \int \rho dv$

ب) کل بار Q در طول L روی استوانه

$q = \int_a^b \frac{k}{r}\cdot 2\pi r dr l = 2\pi k(b-a)l \Rightarrow \boxed{q = 2\pi k(b-a)l}$ کل بار موجود در طول l این پوسته

for $a<r<b$: $\varepsilon_0\oint \vec E\cdot d\vec A = q_{in} \Rightarrow \varepsilon_0 E\cdot 2\pi r l = \int \rho dv = \int_a^r \frac{k}{r}\cdot 2\pi r l dr \Rightarrow E = \frac{k(r-a)}{\varepsilon_0 r}$ ✓

for $a>b$: $\varepsilon_0\oint \vec E\cdot d\vec A = q_{in} \Rightarrow \varepsilon_0 E 2\pi r l = \int_a^b \rho dv = 2\pi k(b-a)l \Rightarrow E = \frac{k(b-a)}{\varepsilon_0 r}$ ✓

ج) با استفاده از قانون گوس میدان الکتریکی E را در نقطه ی r به دست آورید. (بین a و b)

فصل 26: «پتانسیل الکتریکی»

* بنا به تعریف، اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه‌ی A و B واقع در یک میدان الکتریکی برابر است با مقدار کاری که یک عامل خارجی (علیه نیروی الکترواستاتیک) انجام می‌دهد تا واحد بار مثبت را بدون شتاب از نقطه‌ی اول (مثلاً A) به نقطه‌ی دوم (مثلاً B) ببرد.

بنابراین اگر برای بردن بار آزمون مثبت q_0 از نقطه‌ی A به B مقدار کار لازم W_{AB} باشد، می‌توان نوشت:

$$\star\ V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0}$$ کمیتی نرده‌ای

* اغلب نقطه‌ی A (مرجع پتانسیل) را در بینهایت دور انتخاب و پتانسیل آن را صفر می‌گیرند. در این صورت می‌توان از پتانسیل نقطه‌ای مانند B صحبت کرد و نوشت:

$$V_B - 0 = \frac{W_{\infty B}}{q_0} \Rightarrow V_B = \frac{W_{\infty B}}{q_0}$$

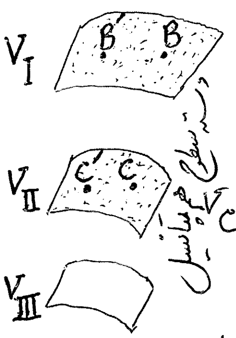
$$\text{if } W_{AB} > 0 \Longrightarrow V_B - V_A > 0 \Longrightarrow V_B > V_A$$

$$\text{if } W_{AB} = 0 \Longrightarrow V_B - V_A = 0 \Longrightarrow V_B = V_A$$

$$\text{if } W_{AB} < 0 \Longrightarrow V_B - V_A < 0 \Longrightarrow V_B < V_A$$

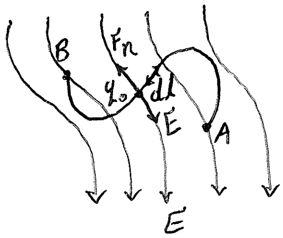
* سطوح هم پتانسیل: یک سطح هم پتانسیل مکان هندسی نقاطی است که دارای پتانسیل یکسان هستند.

* خطوط میدان همیشه بر سطوح هم پتانسیل عمود هستند و جهت میدان در جهتی است که پتانسیل کاهش می‌یابد.



$$V_B = V_{B'} \qquad V_C = V_{C'} \qquad V_B - V_C = V_I - V_{II}$$

رابطه‌ی بین E و اختلاف پتانسیل:



$$\begin{cases} \vec{F}_E = q_0 \vec{E} \\ \vec{F}_M = -q_0 \vec{E} \end{cases}$$

$$\star\ W_{AB} = \int_A^B dW_{AB} = \int_A^B \vec{F}_M \cdot \vec{dl} = \int_A^B -q_0 \vec{E} \cdot \vec{dl} = -q_0 \int \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

کار انجام شده برای جابجا کردن بار از نقطه A به B به اختلاف پتانسیل دو نقطه بستگی دارد.

$$\star\ \frac{W_{AB}}{q_0} = -\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} = V_B - V_A$$

عنصری از طول

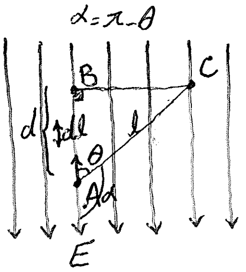
برای جابجایی بار از بینهایت به یک نقطه غیر بینهایت کار میدان باید منفی باشد

مثال: در شکل زیر دو نقطه‌ی A و B که فاصله‌ی آنها از یکدیگر d است در یک میدان یکنواخت $\vec{E}$ واقع شده‌اند.

الف) مطلوبست $V_B - V_A$؛

ب) نقطه‌ی C را مطابق شکل در نظر بگیرید و $V_C - V_A$ را نیز حساب کنید.

ج) $V_B - V_C$ چقدر است؟



الف)

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

$$V_B - V_A = -\int_A^B E\, dl \cos\pi$$

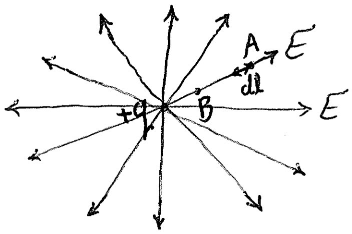
$$V_B - V_A = +\int_A^B E\, dl = E \int_A^B dl = Ed \Rightarrow V = Ed \Rightarrow E = \frac{V}{d}$$

ب)

$$V_C - V_A = -\int_A^C \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\int_A^C E\, dl \cos\alpha = +\int_A^C E\, dl \cos\theta = E\cos\theta \int_A^C dl = E\, l \cos\theta = Ed \Rightarrow V_C - V_A = Ed$$

ج) $V_B - V_C = -\int_C^B \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\int E\,dl\cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow V_B - V_C = 0$

مثال: بار نقطه‌ای $+q$ مفروض است. مطابق شکل دو نقطهٔ A و B را که به ترتیب در فواصل r_A و r_B از بار نقطه‌ای واقع شده‌اند در نظر بگیرید و $V_B - V_A$ را حساب کنید.



$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\int E\,dl\cos\pi = \int_A^B E\,dl = -\int_A^B E\,dr = -\int_{r_A}^{r_B} k\frac{q}{r^2}dr = -kq\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2}$$

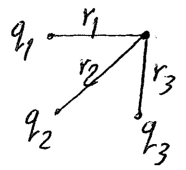
$$V_B - V_A = -kq\left[\frac{-1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = -kq\left[\frac{-1}{r_B} + \frac{1}{r_A}\right] \Rightarrow V_B - V_A = kq\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

اگر A را در بینهایت دور بگیریم (یعنی $r_A = \infty$ باشد) $V_A = 0$ خواهیم داشت،

$$V_B - 0 = kq\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{\infty}\right] = kq/r_B$$

* برای چند بار نقطه‌ای جدا از هم داریم،

می خواهیم پتانسیل یک نقطه را در اثر هر سه بار به دست آوریم



$V_1 = k\frac{q_1}{r_1}$

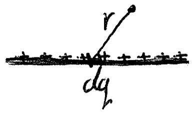
$V_2 = k\frac{q_2}{r_2}$

$\vdots$

$\star\, V = V_1 + V_2 + V_3$

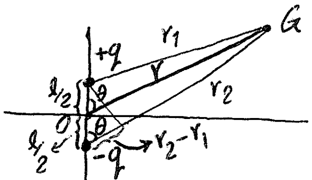
$$\begin{cases} V = \sum V_i \\ V = k\sum \frac{q_i}{r_i} \end{cases}$$

★ برای یک توزیع پیوسته بار داریم،



$\star\, dV = k\frac{dq}{r}$ و $\star\, V = \int dV$

مثال ۱: در دوقطبی شکل زیر $p = lq$ است. پتانسیل الکتریکی را در نقطهٔ $G(r,\theta)$ و یا $[G(x,y)]$ (نسبت به مرجع بینهایت) برای حالتی که $r \gg l$ باشد به دست آورید.



$\cos\theta = \frac{y}{r}$

$$V_G = k\frac{+q}{r_1} + k\frac{-q}{r_2} = kq\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$V_G = kq\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right) \longrightarrow \text{for } r \gg l:\ r_2 - r_1 = l\cos\theta \quad \text{و} \quad r_1 r_2 \approx r^2$$

$$\Rightarrow V_G = k\frac{ql\cos\theta}{r^2} \xrightarrow{P=ql} V_G(r,\theta) = k\frac{P\cos\theta}{r^2} \Rightarrow \text{for } \theta = 0:\ V_G = k\frac{P}{r^2}$$

برای یک دوقطبی

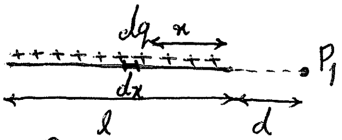
یا برحسب (x,y): $V_G(x,y) = k\frac{Py}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

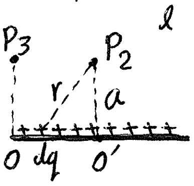
مثال ۲: در شکل زیر مطلوب است، پتانسیل الکتریکی:

الف) در نقطهٔ P_1

ب) در نقطهٔ P_2 (وسط خط بار)

ج) در نقطهٔ P_3





$dq = \lambda dx$

$$V_{P_1} = \int dV = \int k\frac{dq}{(x+d)} = \int_0^l k\frac{\lambda dx}{(x+d)} = k\lambda\int_0^l \frac{dx}{(x+d)}$$

$$V_{P_1} = k\lambda\left[\ln(x+d)\right]_0^l = k\lambda\left[\ln\frac{l+d}{d}\right]$$

$$V_{P_2} = \int dV = \int k\frac{dq}{r} = \int_{-l/2}^{+l/2}\frac{k\lambda dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = k\lambda\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right]_{-l/2}^{+l/2}$$

مقدار این انتگرال درست است و از پیوست B کتاب هالیدی آمده است

$$V_{P_3} = \int dV = \int_0^l k\frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = k\lambda\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right]_0^l$$

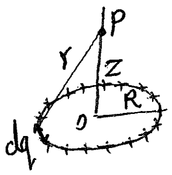
فیزیک 2:

محاسبه پتانسیل الکتریکی در نقطه p در فاصله z از محور حلقه باردار با توزیع یکنواخت

به دست آوردن میدان از پتانسیل:

$$v_B - v_A = -\int_A^B E\,ds \xrightarrow{\text{اگر فقط } E_z \text{ باشد}} E.ds = E_z.dz \Rightarrow E_z = -\frac{dv}{dz}$$

مثال حلقه‌ی باردار:



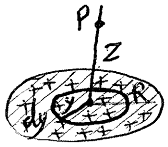
$$V = \int dV = \int k\frac{dq}{r} = \frac{k}{r}\int dq = \frac{kq}{r} \Rightarrow V = k\frac{q}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -kq\left[\frac{\frac{-2z}{2\sqrt{R^2+z^2}}}{R^2+z^2}\right] = kq\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\star\ \vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

مثال صفحه‌ی باردار: در صفحه‌ی دایره‌ای شکل زیر به شعاع R بار با چگالی سطحی ثابت σ توزیع شده، V را در نقطه‌ی P واقع بر محور صفحه و به فاصله‌ی z از مرکز صفحه به دست آورید.

با استفاده از مسئله قبل از پتانسیل ناشی از هر حلقه کوچک استفاده می کنیم.



$$\text{بار حلقه} = 2\pi y\, dy\, \sigma$$

$$\text{پتانسیل کل} = \int \text{پتانسیل حاصل از حلقه} = \int dV = \int_0^R k\frac{2\pi y\, dy\, \sigma}{\sqrt{z^2+y^2}} \Rightarrow V = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{y\,dy}{\sqrt{z^2+y^2}}$$

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2+y^2}\right]_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2+R^2} - z\right]_0^R$$

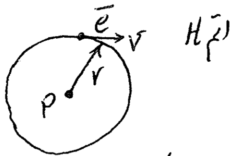
$\star$ انرژی پتانسیل الکتریکی: یک دستگاه تشکل از ذرات باردار برابر است با کاری که انجام شده تا این ذرات از بینهایت دور به محل فعلی شان آورده شده‌اند.

بنابراین برای یک دستگاه متشکل از دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 که به فاصله‌ی r از یکدیگر قرار گرفته انرژی پتانسیل به صورت زیر بدست می آید.

$$\star W_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r}$$

$$\text{درحالت کلی}: W_{ij} = k\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

برای یک اتم هیدروژن:



$e = 1{,}6\times10^{-19}$

$r = 0{,}53\,A^\circ$

انرژی پتانسیل بین الکترون و هسته

$$E_p = W_p = -k\frac{e^2}{r}$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_k = k\frac{e^2}{2r}$$

$$\text{انرژی کل} = E_p + E_k \Rightarrow \text{انرژی کل} = -k\frac{e^2}{r} + k\frac{e^2}{2r} \Rightarrow \text{انرژی کل} = -k\frac{e^2}{2r} = -13{,}6\,eV$$

$\star$ به دست آوردن E از V: در به دست آوردن V از E (وقتی مرجع در بینهایت باشد) دانستیم

$$V_p = -\int_\infty^p \vec{E}\cdot\vec{dl}$$

در اصل چنین می توان نوشت:

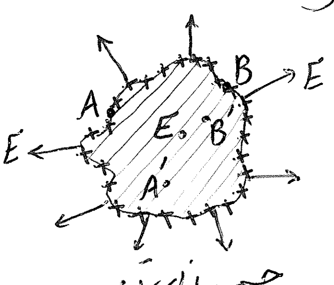
$$dV = -\vec{E}\cdot\vec{dl} = -E\,dl\cos\theta$$

$$E\cos\theta = -\frac{dV}{dl} \Rightarrow E_l = -\frac{dV}{dl}$$

$$E_x = \frac{-dV}{dx},\ E_y = \frac{-dV}{dy},\ E_z = \frac{-dV}{dz} \Longrightarrow E_x = \frac{-\partial V}{\partial x},\ E_y = \frac{-\partial V}{\partial y},\ E_z = \frac{-\partial V}{\partial z}$$

$\star$ رساناها و پتانسیل:

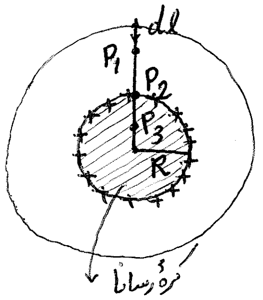
در حالت تعادل الکترواستاتیک یک جسم رسانا یک سطح هم پتانسیل است.



جسم رسانای توپر

$$V_{B'} = V_{A'} = V_A = V_B$$

مثال: یک کره‌ی رسانای توپر به شعاع R دارای بار کل q است که به طور یکنواخت روی سطح آن پخش شده است. پتانسیل الکتریکی در نقاط $r>R$ ، $r=R$ و $r<R$ (نسبت به مرجع) به دست آورید. r فاصله‌ی هر نقطه‌ی دلخواه تا مرکز کره است.



$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{in}$$

$$\varepsilon_0 E \cdot 4\pi r^2 = q$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q}{r^2}$$

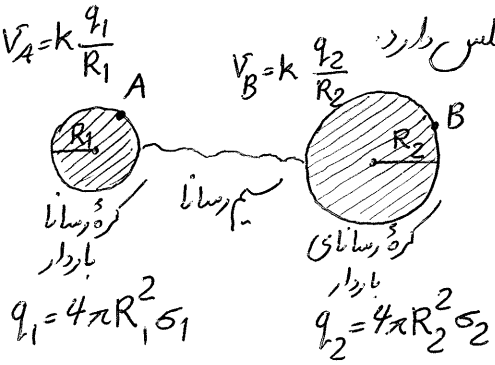
$$V_{P_1} = -\int_{\infty}^{P_1} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{\infty}^{P_1} E\,dl\cos\pi = \int_{\infty}^{P_1} E\,dl = -\int_{\infty}^{P_1} E\,dr = -\int_{\infty}^{r} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q}{r^2}\,dr$$

$$V_{P_1} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{r}\right]_{\infty}^{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q}{r} = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r}} \quad r>R$$

$$\star\, V_{P_2} = V_{P_3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{R}$$

اگر دو جسم رسانا را با یک سیم رسانا به هم وصل کنیم

★ به طریق زیر می‌توان نشان داد در یک جسم رسانا چگالی سطحی بار با شعاع انحناء نسبت عکس دارد.

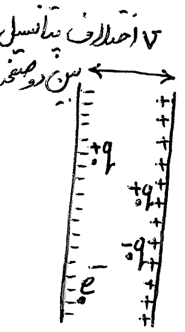


از مثال قبل

اما $V_A = V_B \Rightarrow k\,\frac{q_1}{R_1} = k\,\frac{q_2}{R_2} \Rightarrow \frac{4\pi R_1^2 \sigma_1}{R_1} = \frac{4\pi R_2^2 \sigma_2}{R_2}$

$$\Rightarrow R_1\sigma_1 = R_2\sigma_2 \qquad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

تعریف الکترون ولت: کار انجام شده برای انتقال یک الکترون از یک صفحه به صفحه دیگر با اختلاف پتانسیل یک ولت، یک الکترون ولت است.



W: الکترون ولت (ژ)

q: بار الکترون (c)

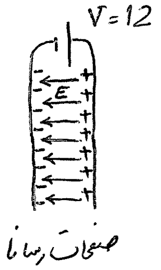
V: ولت (v)

$$\star\, W = qV \Rightarrow W = 1{,}6\times10^{-19} \times 1 = 1{,}6\times10^{-19}\ \text{ژ}$$

$$W = 1eV$$

$$1eV = 1{,}6\times10^{-19}\ \text{ژ}$$

مسئله 1 فصل 26 هودرسون: یک باطری 12 ولت به دو صفحه موازی بزرگ متصل شده اند فاصله صفحات 4mm است.



$$V = Ed \Rightarrow E = \frac{V}{d}$$

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = e\vec{E} = -e\vec{E} \Rightarrow F_e = eE = m_e a \Rightarrow a = \frac{eE}{m}$$

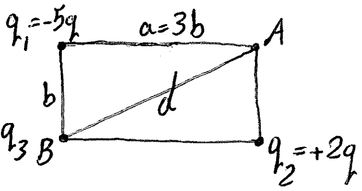
الف) بزرگی میدان الکتریکی را به دست آورید.

ب) یک پروتون از صفحه مثبت آزاد و به سمت صفحه منفی شتاب می گیرد. تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی پروتون در طول حرکت چقدر است؟

الف) $$v_B - v_A = -\int_0^d E\,dy = -E.d \Rightarrow |E| = \frac{|v_B - v_A|}{d} = \frac{12}{4} \times 10^{-3} = 3000\,\frac{v}{m}$$

ب) $$\Delta u = q\Delta v = (1.6 \times 10^{-19})(-12) = -12ev$$

مسئله 45 فصل 20 هالیدی: در شکل سمت چپ مقادیر پتانسیل الکتریکی خواسته شده را بدست آورید



$b = 5cm$ و $a = 15cm$ و $q = 1\mu c$

الف) $V_A = ?$

ب) $V_B = ?$

ج) چقدر کار لازم است که بار 3q از نقطه B به A برود؟

$$V_A = k\frac{-5q}{a} + k\frac{+2q}{b} = k\frac{-5q}{3b} + k\frac{2q}{b} = \frac{kq}{3b}$$

$$V_B = k\frac{-5q}{b} + k\frac{+2q}{3b} = \frac{-13}{3}k\frac{q}{b}$$

$q_3 = 3q$ / $d = \sqrt{b^2 + 9b^2}$

$d = \sqrt{10}\,b$

$$V = (V_A - V_B) \Rightarrow W = q_3(V_A - V_B) \Rightarrow W = 3q\left(\frac{kq}{3b} + \frac{13}{3}k\frac{q}{b}\right) \Rightarrow W = 14k\frac{q^2}{b}$$

W: وقتی q_3 در B قرار دارد،

W': وقتی q_3 در A قرار دارد،

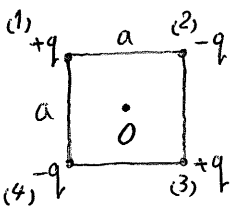
$$W = W_{12} + W_{13} + W_{23} = k\frac{(-5q)(2q)}{b\sqrt{10}} + k\frac{(-5q)(3q)}{b} + k\frac{(3q)(2q)}{3b}$$

$$W' = k\frac{(-5q)(2q)}{b\sqrt{10}} + k\frac{(-5q)(3q)}{3b} + k\frac{(3q)(2q)}{b}$$

$$\Big\} \; W' - W = 14k\frac{q^2}{b}$$

مسئله 41 فصل 20 هالیدی: چقدر کار لازم است تا ترکیب و نظم روبرو شکل بگیرد؟

فرض می کنیم در ابتدا فضا خالی است و یکی یکی بارها را می آوریم و می گذاریم



$$W = W_{12} + W_{13} + W_{23} + W_{14} + W_{24} + W_{34} \leftarrow$$ طبق تعریفی که از اختلاف پتانسیل داشتیم

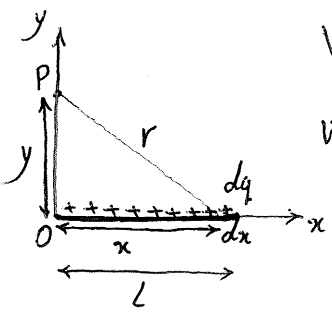
$$= k\frac{(q)(-q)}{a} + k\frac{(q)(q)}{\sqrt{2}a} + k\frac{(-q)(q)}{a} + k\frac{(q)(-q)}{a} + k\frac{(-q)(-q)}{\sqrt{2}a} + k\frac{(q)(-q)}{a}$$

$$= \frac{kq^2}{a}\left[-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right] = -2{,}6\,\frac{kq^2}{a}$$

? هرگاه بخواهیم یک بار مثبت q را از بی نهایت دور به نقطه O بیاوریم چقدر کار باید انجام دهیم؟

$$W = qV = q(V_o - V_\infty) = qV_o \Rightarrow V_o = 0 \Rightarrow W = 0$$

مسئله 15 فصل 26 هودرسون:

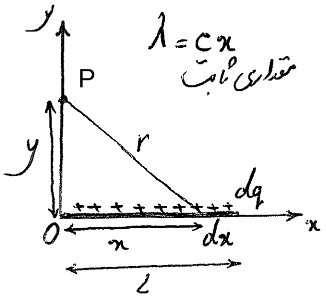


$V_p = ?$

$$V = \int dV = \int k\frac{dq}{r} \Rightarrow V = \int_0^l \frac{k\lambda dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = k\lambda\left[\ln[x + \sqrt{x^2 + y^2}]\right]_0^l = k\lambda\left[\ln(l + \sqrt{y^2 + l^2}) - \ln y\right]$$

بار غیر یکنواخت روی میله نارسانای نازک توزیع شده است. پتانسیل نقطه o، نقطه P و اختلاف پتانسیل این دو نقطه را به دست آورید

مسئله 40 فصل 20 هالیدی:



$$V=\int dV=\int k\frac{dq}{r}$$

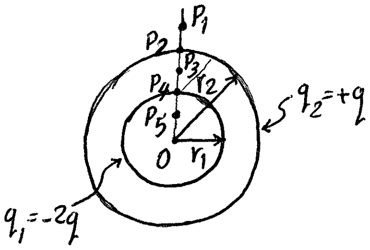
$$V=\int_0^l k\frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2+y^2}}=k\int_0^l\frac{cx\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow V_p=kc\left[\sqrt{x^2+y^2}\right]_0^l=kc\left[\sqrt{l^2+y^2}-y\right]$$

$$V_o=kcl$$

$$V_p-V_o=kc\left[\sqrt{l^2+y^2}-y\right]-kcl$$

در شکل زیر بار +q روی حلقه بیرونی و بار -2q روی حلقه داخلی به طور یکنواخت پخش شده است. E و V را برای پنج نقطه مشخص شده در شکل به دست آورید.

مسئله 13 فصل 26 هودسون:



$r_2=5cm$, $r_1=30cm$, $q=40\mu C$

$$\begin{cases} q_1=-2q \\ q_2=q \end{cases}$$

$r>r_2$, $r_1<r<r_2$, $r<r_1$ $\quad V, E = ?$

$$for:\ r>r_2 \Rightarrow \varepsilon_0\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=q_{in} \Rightarrow \varepsilon_0 E\, 4\pi r^2=-q \Rightarrow E_{out}=\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{q}{r^2} \quad : r>r_2$$

$$for:\ r_1<r<r_2 \Rightarrow \varepsilon_0\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=q_{in} \Rightarrow \varepsilon_0 E\cdot 4\pi r^2=-2q \Rightarrow E_M=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{-2q}{r^2} \quad : r_1<r<r_2$$

$$for:\ r<r_1 \Rightarrow \varepsilon_0\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=q_{in} \Rightarrow \varepsilon_0 E\cdot 4\pi r^2=0 \Rightarrow E_{in}=0 \quad : r<r_1$$

$$for:\ r>r_2 \Rightarrow V_{P_1}=-\int_\infty^{P_1}\vec{E}_{out}\cdot d\vec{l}=-\int_\infty^{P_1}E\cdot dl=+\int_\infty^{P_1}E\cdot dr=\int_\infty^{r}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{q}{r^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{r}\right]_\infty^r=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{-q}{r}=V_{P_1}$$

$$for:\ r=r_2 \Rightarrow V_{P_2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{-q}{r_2}$$

تا بسیار نزدیک به نقطه P_2 میدان تغییری نمی کند. پس از فرمول قبلی استفاده می کنیم

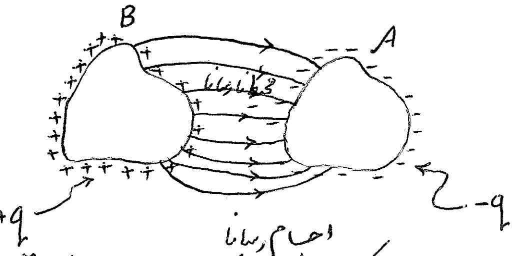
$$for:\ r_1<r<r_2 \Rightarrow V_{P_3}=-\int_\infty^{P_3}\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\left[\int_\infty^{P_2}\vec{E}_{out}\cdot d\vec{l}+\int_{P_2}^{P_3}\vec{E}_M\cdot d\vec{l}\right]=-\int_\infty^{P_2}\vec{E}_{out}\cdot d\vec{l}-\int_{P_2}^{P_3}\vec{E}_M\cdot d\vec{l}\ \star$$

$$\Rightarrow V_{P_3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{-q}{r_2}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{2q}{r_2}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{2q}{r} \Rightarrow V_{P_3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{q}{r_2}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{2q}{r}$$

$$\star\ -\int_{P_2}^{P_3}\vec{E}_M\cdot d\vec{l}=\int_{r_2}^{r}E_M\cdot dr=\int_{r_2}^{r}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{2q}{r^2}dr=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2q\left[\frac{-1}{r}\right]_{r_2}^{r}=\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{r}+\frac{1}{r_2}\right]$$

$$V_{P_5}=V_{P_4}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{q}{r_2}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{2q}{r_1}=V_0$$

فصل 27 کتاب فیزیک دانشگاهی خودمون: «ظرفیت» یا «خازن»

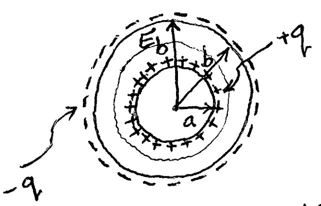


$$(F)\ \text{فاراد} = \frac{\text{کولن}}{\text{ولت}} = \frac{q}{V} = C \ \text{ظرفیت خازن}$$

$$\Rightarrow q = CV$$

هریک از این رساناها معادل یک قطب یا یک صفحهٔ خازن است.

مثال 1: در یک خازن کروی، مطابق شکل، شعاع قطب داخلی a و شعاع قطب بیرونی b است، ظرفیت این خازن را بدست آورید.



ظرفیت خازن کروی:

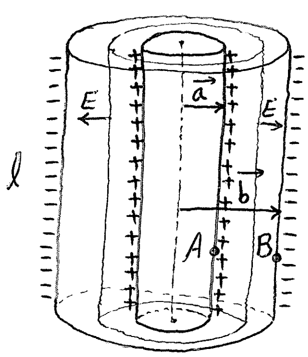
$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{in}$$

$$\varepsilon_0 E \cdot 4\pi r^2 = q \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \quad a<r<b$$

$$V = V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l} = +\int_B^A E\,dl = -\int_b^a E\,dr = -\int_b^a \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{q}{r^2}\,dr = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{r}\right]_b^a =$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) \Rightarrow V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{(b-a)}{ab} \Rightarrow C = \frac{q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$$

مثال 2: خازن استوانه‌ای یک استوانه‌ی رسانا به شعاع مقطع a و طول l توسط یک پوسته‌ی رسانای استوانه‌ای شکل به شعاع b و طول l به طور هم محور احاطه شده و یک خازن تشکیل می‌دهند، به فرض اینکه $b<<l$ باشد، ظرفیت این خازن را حساب کنید.



$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{in}$$

$$\varepsilon_0 E \cdot 2\pi r l = q$$

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r l}, \quad a<r<b$$

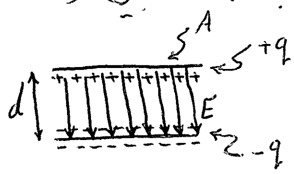
$$V = V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_B^A E\,dl = -\int_b^a E\,dr$$

$$V = -\int_b^a \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l r}\,dr = \frac{-q}{2\pi\varepsilon_0 l}\left[\ln r\right]_b^a = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{b}{a}$$

$$\star\ C = \frac{q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln b/a}$$

ظرفیت خازن استوانه‌ای

مثال 3: در یک خازن مسطح، مساحت هر صفحه A و فاصله دو صفحه از یکدیگر d است. با فرض اینکه ابعاد هر صفحه نسبت به فاصله بین دو صفحه، بزرگ باشد ظرفیت این خازن را بدست آورید.



$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q$$

$$\varepsilon_0 E A = q \Rightarrow E = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$$

ظرفیت خازن مسطح:

$$V = V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{l} = +\int_b^a E\,dl = E\int_b^a dl = Ed \Rightarrow V = \frac{qd}{\varepsilon_0 A} \Rightarrow C = \frac{q}{V} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

اثر جنس دی الکتریک (یا عایق) بین دو قطب بر ظرفیت یک خازن:

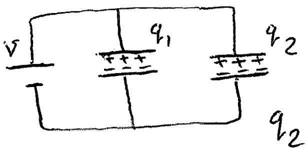
ماده	k
خلاء	1
هوا	1,0005
شیشه	4-6
پلاستیک	3
آب مقطر	~80

ضریب یا ثابت دی الکتریک ماده بین دو قطب

$$k = \frac{C_2}{C_1} = \frac{\frac{q_2}{V}}{\frac{q_1}{V}} = \frac{q_2}{q_1}$$

$$C_2 = kC_1$$

$$C_1 = \frac{q_1}{V} , C_2 = \frac{q_2}{V}$$



$q_2 > q_1$

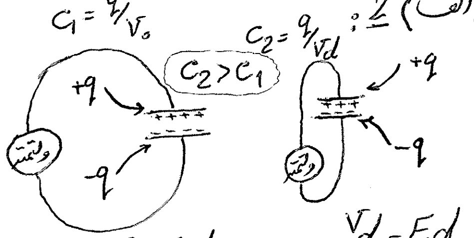
* آزمایش الف) 1:

اگر ولتاژ همسانی را به دو خازن وصل کنیم بار متفاوتی روی آنها ذخیره می شود.

* آزمایش الف) 2:

اگر بارهای همسان روی دو خازن با ظرفیت متفاوت داشته باشیم ولتاژ متفاوتی را خواهند داشت

$C_1 = q/V_0$, $C_2 = q/V_d$, $C_2 > C_1$



$V_0 = E_0 d$, $V_d = Ed$, $V_d < V_0$

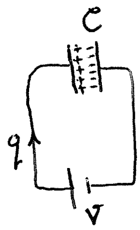
$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\frac{q}{V_d}}{\frac{q}{V_0}} = \frac{V_0}{V_d} = k \Rightarrow C_2 = kC_1$$

$k > 1$

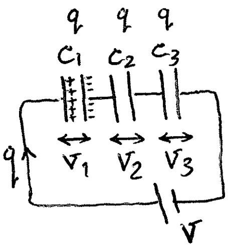
$$\frac{C_2}{C_1} = k = \frac{V_0}{V_d} = \frac{E_0 d}{Ed} = \frac{E_0}{E} \Rightarrow E = \frac{E_0}{k} \Rightarrow E_0 = kE$$

به هم بستن خازن ها و ظرفیت معادل:

الف) به صورت متوالی:



$q = CV$

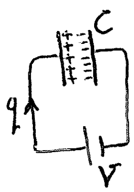


$$\begin{cases} q = C_1 V_1 \\ q = C_2 V_2 \\ q = C_3 V_3 \end{cases}$$

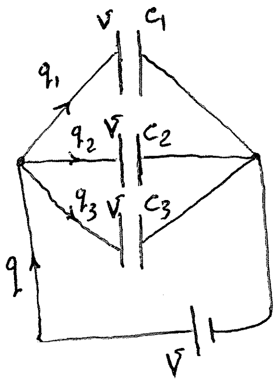
$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

$$\frac{q}{C} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}$$

ب) به صورت موازی:



$q = CV$

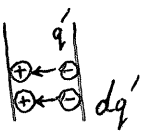


$$\begin{cases} q_1 = C_1 V \\ q_2 = C_2 V \\ q_3 = C_3 V \end{cases}$$

$$q = q_1 + q_2 + q_3$$

$$CV = C_1 V + C_2 V + C_3 V$$

$$\boxed{C = C_1 + C_2 + C_3}$$



$$V' = \frac{q'}{C} \Rightarrow W = \int dW = \int_0^q V' dq' = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{q^2}{2C}$$

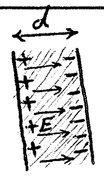
$$dW = V' dq'$$

می خواهیم ذره ذره بارهای dq' را از صفحه منفی به صفحه مثبت ببریم فرض می کنیم

در حال حاضر بار q' روی صفحات باشد و بخواهیم +dq' را از صفحه منفی به مثبت منتقل کنیم در این لحظه ولتاژ V' است.

* انرژی الکترواستاتیکی یا الکتریکی ذخیره شده در خازن پر شده از بار:

$$\star W = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} qV$$



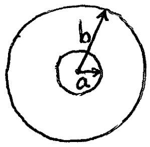
A مساحت هر صفحه

چگالی حجمی انرژی الکترواستاتیکی $u = \frac{W}{V} = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{Ad} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{K\varepsilon_0 A}{d})V^2}{Ad} = \frac{1}{2}K\varepsilon_0(\frac{V}{d})^2 = \frac{1}{2}K\varepsilon_0 E^2$

حجم

$$\boxed{u = \frac{1}{2}K\varepsilon_0 E^2} \qquad E = \frac{V}{d}$$

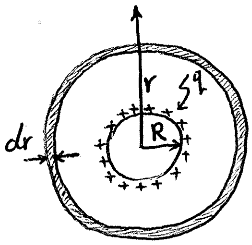
یادآوری خازن کروی:



$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a} \qquad \text{if } b \to \infty \Rightarrow C = 4\pi\varepsilon_0 a$$

* گاهی یک کره‌ی رسانای تنها را نیز می‌توان یک خازن نامید، که در این صورت فرض بر این است که قطب دیگر هم مرکز با این کره و دارای شعاع ∞ است. با این توصیف ظرفیت یک کره‌ی رسانا به شعاع a برابر خواهد بود با: $\star\, C = 4\pi\varepsilon_0 A$

مثال: یک کره‌ی رسانا به شعاع R دارای بار کل q است که به طور یکنواخت روی سطح آن پخش شده است. انرژی الکتریکی ذخیره شده در اطراف این کره را حساب کنید.



$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{in}$$

$$\varepsilon_0 E\, 4\pi r^2 = q \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q}{r^2} \qquad r > R$$

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 ,\ dv = 4\pi r^2 dr \Rightarrow W = \int dW = \int u\,dv = \int_R^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 . 4\pi r^2 dr = \int_R^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 (\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2})^2 . 4\pi r^2 dr$$

چگالی حجمی

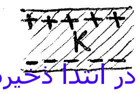
حجم

$$W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{r}\right]_R^\infty = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

یک خازن به باطری 100 ولت وصل است . بار و انرژی ذخیره شده در خازن چقدر است؟

*مثال 27-10:

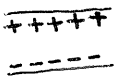
$K=5 \qquad C_i = 2nF \qquad V_i = 100V$



حالت الف) $W_i = \frac{1}{2}C_iV_i^2 = \frac{1}{2}\times 2\times10^{-7}\times(100)^2 = 10^{-2}J$

$q_i = C_iV_i = 2\times10^{-9}\times100 = 2\times10^{-7}C$ باری که در ابتدا ذخیره شد

حالت ب) اکنون باتری را از خازن جدا می‌کنیم: و ماده دی الکتریک را از خازن خارج می کنیم. انرژی ذخیره شده در خازن چقدر می شود؟



f: حالت نهایی

$$q_i = q_f$$

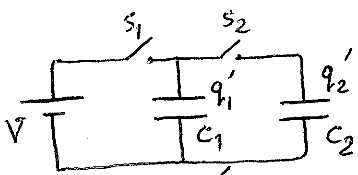
$$C_i = KC_f \Rightarrow C_f = \frac{C_i}{K} = \frac{2}{5}nF$$

$$q_f = C_fV_f \Rightarrow V_f = \frac{q_f}{C_f} = \frac{q_i}{\frac{C_i}{K}} = K(\frac{q_i}{C_i}) = KV_i = 500V$$

$$W_f = \frac{1}{2}C_fV_f^2 = \frac{1}{2}(\frac{C_i}{K})(KV_i)^2 = (\frac{1}{2}C_iV_i^2)\times K = (10^{-5})\times 5 = 5\times10^{-5}J$$

مثال: در شکل زیر در حالیکه کلید S_2 قطع است ابتدا کلید S_1 را می‌بندیم.

الف) در این حالت انرژی ذخیره شده در دستگاه چقدر است؟



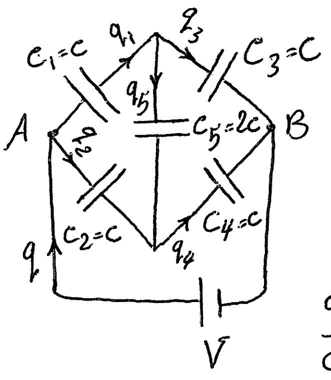
$$q_1 = C_1V$$

ب) اکنون کلید S_1 را قطع و S_2 را می‌بندیم. انرژی را در این حالت حساب کنید و علت اختلاف با حالت الف را بیان کنید.

$$\begin{cases} q_1' = C_1V' \\ q_2' = C_2V' \\ q_1' + q_2' = q \end{cases} \Rightarrow C_1V' + C_2V' = C_1V \Rightarrow V' = \frac{C_1}{C_1+C_2}V ,\ W_f = \frac{1}{2}C_1V'^2 + \frac{1}{2}C_2V'^2 = \frac{1}{2}(C_1+C_2)V'^2$$

$$W_f = \frac{1}{2}(C_1+C_2)\left(\frac{C_1}{C_1+C_2}V\right)^2 = \frac{1}{2}C_1V^2\left(\frac{C_1}{C_1+C_2}\right) \Rightarrow W_f = \frac{C_1}{C_1+C_2}W_i$$

مسئله 5 فصل 27 هودرکون :



باری که وارد صفحات 1 و 2 می شود

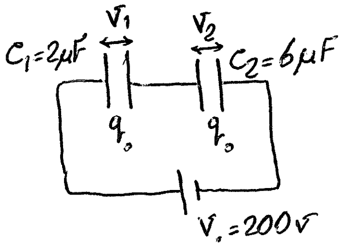
$$\begin{cases} q = q_1 + q_2 \\ q_1 = q_3 + q_5 \\ q_4 = q_5 + q_2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_3}{C_3} = V \Rightarrow \frac{q_1}{C} + \frac{q_3}{C} = V \Rightarrow q_1 + q_3 = CV \\ \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_4}{C_4} = V \Rightarrow \frac{q_2}{C} + \frac{q_4}{C} = V \Rightarrow q_2 + q_4 = CV \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_5}{C_5} + \frac{q_4}{C_4} = V \quad / \Rightarrow \overbrace{q_1 + q_2}^{q} + \overbrace{q_3 + q_4}^{q} = 2CV \Rightarrow q = CV$$

مسئله 10 :

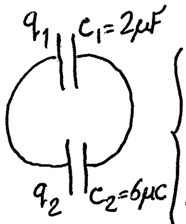
الف) در شکل مقابل ولتاژ و بار هر کدام از خازنها را به دست آورید



$$\begin{cases} q_0 = C_1V_1 \Rightarrow V_1 = \frac{q_0}{C_1} = \frac{300\times10^{-6}}{2\times10^{-6}} = 150 \\ q_0 = C_2V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{q_0}{C_2} = \frac{300\times10^{-6}}{6\times10^{-6}} = 50 \\ V_1 + V_2 = V_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{q_0}{C_1} + \frac{q_0}{C_2} = V_0 \Rightarrow q_0\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = V_0 \Rightarrow q_0 = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}V_0 \Rightarrow q_0 = \frac{2\times10^{-6}\times6\times10^{-6}}{(2+6)\times10^{-6}}\times200 = 300\,\mu C$$

ب) خازنها را از ولتاژ ورودی جدا می کنیم و دو سر مثبت را به هم و دو سر منفی را به هم وصل می کنیم. حال اختلاف پتانسیل و بار هر کدام را بدست آورید.

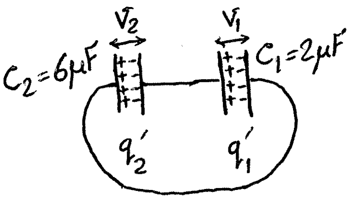


$$\begin{cases} q_1 = C_1V' \\ q_2 = C_2V' \\ q_1 + q_2 = 2q_0 \end{cases} \Rightarrow C_1V' + C_2V' = 2q_0$$

$$V' = \frac{2q_0}{C_1+C_2} = \frac{2\times300\times10^{-6}}{(2+6)\times10^{-6}} = 75\,V$$

$$q_1 = C_1V' = 2\times10^{-6}\times75 = 150\,\mu C, \quad q_2 = C_2V' = 6\times10^{-6}\times75 = 450\,\mu C$$

ج) اگر سر منفی اولی را به مثبت دومی و مثبت اولی را به منفی دومی وصل کنیم چه اتفاقی می افتد؟



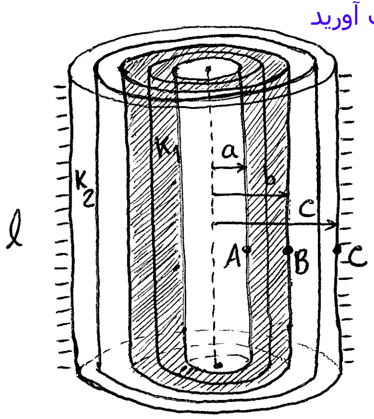
$$\begin{cases} q_1' = C_1V_1' \\ q_2' = C_2V_2' \end{cases} \Rightarrow \frac{q_1'}{C_1} + \frac{q_2'}{C_2} = 0 \Rightarrow \frac{q_1'}{C_1} + \frac{q'}{C_2} = 0 \Rightarrow q_1'\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = 0$$

لذا $q_1' = 0$

$$q_1' - q_2' = +q_0 - q_0 \Rightarrow q_1' = q_2'$$

یک خازن استوانه ای با دو دی الکتریک را در نظر بگیرید. با استفاده از پارامترهای داده شده C را به دست آورید

مسئله 21 :



محاسبه E_1 و E_2 :

$$\varepsilon_0 \oint K_1 E_1 \cdot dA = q_{in} \Rightarrow \varepsilon_0 K_1 E_1 2\pi r l = q$$

درون k_1

$$\star\ E_1 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 K_1 r l} \quad a<r<b$$

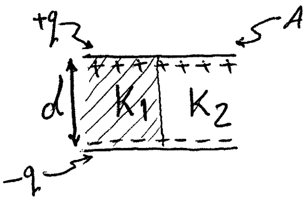
$$\varepsilon_0 \oint K_2 E_2 dA = q_{in} \Rightarrow \varepsilon_0 K_2 E_2 2\pi r l = q \Rightarrow E_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 K_2 r l}$$

$$V = V_A - V_C = -\int_C^A \vec{E}\,\vec{dl} \Rightarrow V = -\left[\int_C^B \vec{E_2}\,\vec{dl} + \int_B^A \vec{E_1}\,\vec{dl}\right]$$

$$V = -\int_c^b E_2 dr - \int_b^a E_1 dr = -\int_c^b \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 K_2 r l}dr - \int_b^a \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 K_1 r l}dr = q\left[\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l K_2}\ln\frac{c}{b} + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l K_1}\ln\frac{b}{a}\right]$$

$$\frac{q}{V}=\frac{1}{\frac{\ln\frac{c}{b}}{2\pi\varepsilon_0 l K_2}+\frac{\ln b/a}{2\pi\varepsilon_0 l K_1}}=\frac{2\pi\varepsilon_0 l K_1 K_2}{K_1\ln\frac{c}{b}+K_2\ln\frac{b}{a}}=C$$

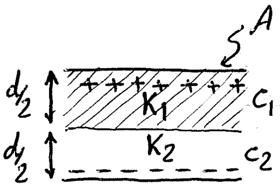
تمرین اضافی 1:



$$C=C_1+C_2=\frac{K_1\varepsilon_0 A}{2d}+\frac{K_2\varepsilon_0 A}{2d}=\frac{A\varepsilon_0}{d}\left[\frac{K_1+K_2}{2}\right]$$

$$C_1=\frac{K_1\varepsilon_0 A/2}{d}\quad,\quad C_2=\frac{K_2\varepsilon_0 A/2}{d}$$

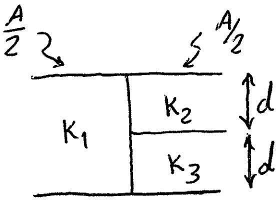
تمرین اضافی 2:



$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\Rightarrow C=\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}$$

$$C_1=\frac{K_1\varepsilon_0 A}{d/2}\quad,\quad C_2=\frac{K_2\varepsilon_0 A}{d/2}$$

مسئله فصل 26 هالیدی:



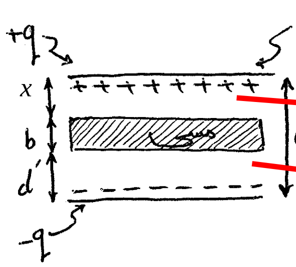
$$C_2=\frac{K_2\varepsilon_0 A/2}{d}\quad,\quad C_1=\frac{K_1\varepsilon_0 A/2}{2d}$$

$$C_3=\frac{K_3\varepsilon_0 A/2}{d}\Rightarrow C'=\frac{C_2C_3}{C_2+C_3}\Rightarrow C_{\text{کل}}=C'+C_1$$

صفحه رسانا به ضخامت d بین دو صفحه خازن است(نه لزوماً وسط)

مسئله 59 فصل 26 هالیدی:

الف) ظرفیت این خازن را حساب کنید.



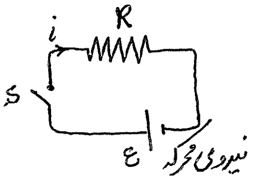
$$C_1=\frac{\varepsilon_0 A}{x}$$

$$C_2=\frac{\varepsilon_0 A}{d-b-x}$$

$$\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{x}{\varepsilon_0 A}+\frac{d-b-x}{\varepsilon_0 A}=\frac{d-b}{\varepsilon_0 A}\Longrightarrow C=\frac{\varepsilon_0 A}{d-b}$$

اینجا هنوز به مفهوم ولتاژ نرسیده ایم و باتری را به عنوان نیروی محرکه در نظر می گیریم

فصل 28 کتاب فیزیک دانشگاهی هودسون : «جریان الکتریکی و مقاومت»



فرض کنید باتری dw کار انجام دهد و dq بار به مدار بفرستد

در این صورت ، ولت = (ژول)/(کولن) ، $* \varepsilon = \frac{dw}{dq}$

$i = \frac{dq}{dt}$ شدت جریان ، (c) کولن / (s) ثانیه = A (آمپر)

* در جهت حرکت بارهای مثبت یا خلاف جهت بارهای منفی در نظر گرفته می شود.

ε برابر است با کار انجام شده بر واحد بار

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon\frac{dq}{dt} = \varepsilon I$$

ε همان افزایش انرژی پتانسیل به ازاء واحد بار است (ولتاژ)

$j = \frac{i}{A}$ چگالی سطحی جریان ، A مساحت مقطع سیم $\Rightarrow j = \frac{di}{dA} \Rightarrow d\vec{i} = \vec{j}\, d\vec{A} \Rightarrow i = \int j\, dA$

$V_{Th} \sim 10^6$ تا $10^8 \, cm/s$

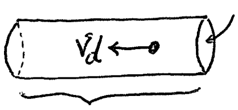
$V_d \sim 10^{-2} \, cm/s$ ← سرعت سوق یا سرعت رانش

سرعت انتقال انرژی الکترومغناطیسی از محل منبع به مصرف $\Rightarrow c \simeq 3\times10^8 \, m/s$

چگالی سطحی جریان

سرعت حرکت الکترونها

* رابطه بین j و V_d را بدست آورید.



n = چگالی حجمی الکترونهای رسانش سیم

$l = V_d t$ ، از طرفی $q = nAle$ ، e بار الکتریکی الکترون

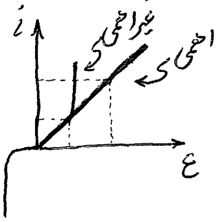
$$\Rightarrow i = \frac{q}{t} = \frac{nAle}{\frac{l}{V_d}} = \frac{nAleV_d}{l} = nAeV_d$$

$$\Rightarrow \frac{i}{A} = neV_d \Rightarrow \boxed{j = neV_d} \checkmark$$

$dw = Ri^2 dt$

$w = \int dw = \int Ri^2 dt \Rightarrow *W = Ri^2 t$ اگر i ثابت باشد.

توان باتری : $*P_\varepsilon = \varepsilon i$ و توان مصرفی : $*P = \frac{dw}{dt} = Ri^2$



$R = \frac{\varepsilon}{i}$

$i = \frac{\varepsilon}{R}$

* فصل 29 «حل مدارهای الکتریکی DC»

قوانین مداری :

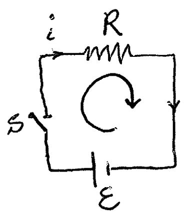
1- قانون جریانها یا قانون گره : جمع جبری جریانها در یک گره برابر صفر است. $* \sum_{n=1}^{n} i_n = 0$ (KCL)

این قانون در واقع بیانگر اصل پایستگی بار الکتریکی است.

2- قانون پتانسیل ها (KVL) یا قانون مدار بسته (حلقه) : در یک مدار، در یک حلقه کامل جمع جبری اختلاف پتانسیل های قسمت های مختلف مدار برابر صفر است. $\sum V_n = 0$ در یک حلقه

«این قانون در واقع بیانگر اصل پایستگی انرژی در مدار است»

نکته : برای قانون دوم از یک نقطه شروع می کنیم مدار را در جهت دلخواه طی می کنیم و در طول مسیر اختلاف پتانسیل ها را جمع می کنیم



$-iR + \varepsilon = 0$

$iR = \varepsilon$

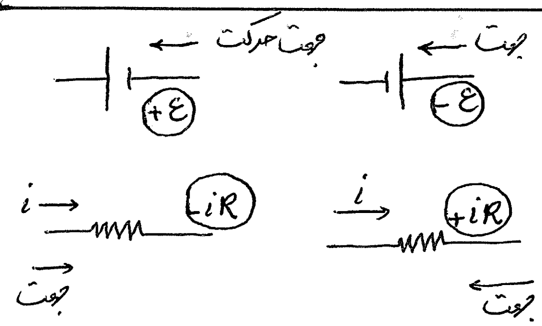
$i = \frac{\varepsilon}{R}$

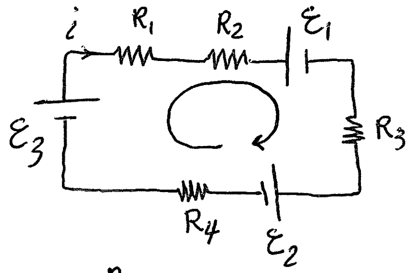
مسائل: فصل 29 هودسون: 60-61-62
فصل 23 هالیدی: 7-94-95

در نوشتن علامت اختلاف پتانسیل که به صورت زیر عمل می کنیم:

1- در خلاف جهت باتری (از اختلاف پتانسیل زیاد به کم)

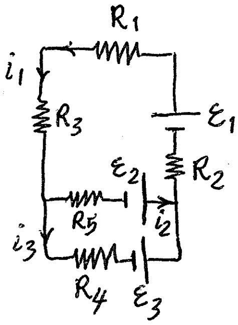
2- اگر یک مقاومت در جهت جریان طی شود، علامت پتانسیل $-iR$





$$-\varepsilon_2 - iR_4 + \varepsilon_3 - iR_1 - iR_2 - \varepsilon_1 - iR_3 = 0$$

$$\star\ i = \frac{-\varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_1}{R_4 + R_1 + R_2 + R_3}$$

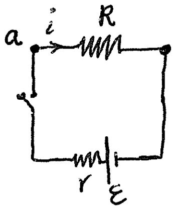


$$\star\ i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$\begin{cases} -i_2R_5 + \varepsilon_2 - i_1R_2 + \varepsilon_1 - i_1R_1 - i_1R_3 = 0 \\ -i_3R_4 + \varepsilon_3 - \varepsilon_2 + i_2R_5 = 0 \end{cases}$$

مقاومت داخلی باتری:

الف) $i = ?$



$$-iR + \varepsilon - ir = 0 \Rightarrow \boxed{i = \frac{\varepsilon}{R + r}}$$

ب) $V_a - V_b = ?$

$$V_a - iR = V_b \Rightarrow V_a - V_b = iR \Rightarrow \boxed{V_{ab} = iR}$$

$$V_a + ir - \varepsilon = V_b \Rightarrow V_a - V_b = \varepsilon - ir \Rightarrow V_{ab} = \varepsilon - ir \Rightarrow V_{ab} = \varepsilon - r\frac{V_{ab}}{R} \Rightarrow V_{ab}\left(1 + \frac{r}{R}\right) = \varepsilon$$

$$\boxed{\star\ V_{ab} = \frac{\varepsilon R}{r + R}}$$

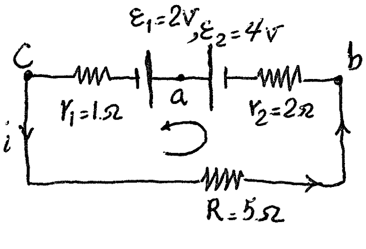
★مثال: در مدار شکل روبرو مطلوب است:

الف) جریان مدار

ب) $V_a - V_b$

ج) $V_a - V_c$

د) تحقیق پایستگی انرژی.



الف)

$$-iR - ir_2 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 - ir_1 = 0$$

$$i = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{R + r_2 + r_1} = \frac{4 - 2}{5 + 2 + 1} = 0{,}25A$$

ب)

$$V_a - \varepsilon_2 + ir_2 = V_b \Rightarrow V_a - V_b = \varepsilon_2 - ir_2 = 4 - 0{,}25 \times 2 = 3{,}5\ V$$

ج)

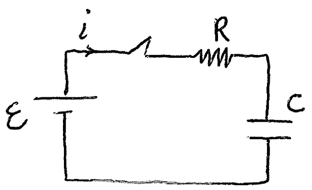
$$V_a - \varepsilon_1 - ir_1 = V_c \Rightarrow V_a - V_c = \varepsilon_1 + ir_1 = 2 + 0{,}25 \times 1 = 2{,}25\ V$$

د)

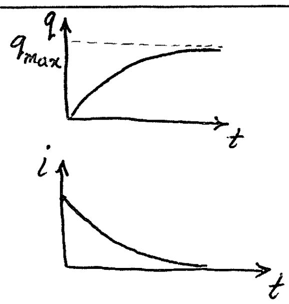
$$\text{مقاومت}\Big\{ P = Ri^2 + r_1i^2 + r_2i^2 = (R + r_1 + r_2)(i^2) = 8 \times \frac{1}{16} = 0{,}5\ \text{watt}$$

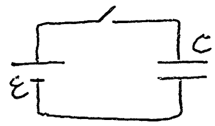
$$\left.\begin{array}{l} P_{\varepsilon_1} = \varepsilon_1 i = 2 \times 0{,}25 = 0{,}5\ \text{watt} \\ P_{\varepsilon_2} = \varepsilon_2 i = 4 \times 0{,}25 = 1\ \text{watt} \end{array}\right\} \Rightarrow P_{\varepsilon_2} = P_{\varepsilon_1} + P_{\text{مقاومتها}}$$

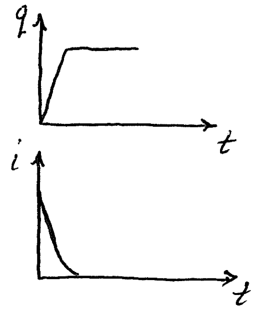
مدارهای RC:

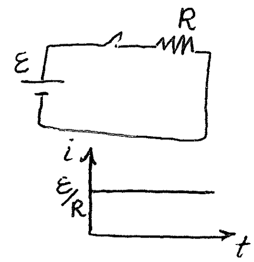


$$\begin{cases} q_{max} = C\varepsilon \\ i_{max} = \varepsilon / R \end{cases}$$



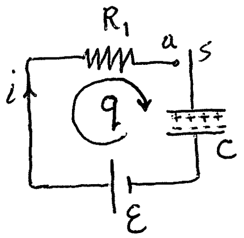






مثال: الف) پرشدن خازن

الف) قبل از اتصال کلید به نقطهٔ a، خازن بدون بار است. در لحظهٔ $t=0$ کلید به نقطهٔ a متصل می‌شود
پس از اتصال کلید به نقطهٔ a در یک لحظهٔ دلخواه t بار و جریان مدار را بدست آورید. حداکثر باری که خازن در این حالت می‌گیرد چقدر است؟

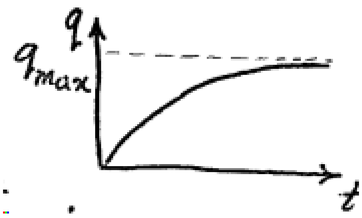


$$\varepsilon - R_1\frac{dq}{dt} - \frac{q}{c} = 0 \Rightarrow \frac{c\varepsilon - q}{c} = R_1\frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{dt}{R_1 c} = \frac{dq}{c\varepsilon - q}$$

q و t از 0 شروع می‌شوند

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{dt}{R_1 c} = \int_0^q \frac{dq}{c\varepsilon - q} \Rightarrow \left[\frac{t}{R_1 c}\right]_0^t = -[\ln(c\varepsilon - q)]_0^q$$

$$\Rightarrow \frac{t}{R_1 c} = -(\ln(c\varepsilon - q) - \ln(c\varepsilon)) \Rightarrow e^{-\frac{t}{R_1 c}} = e^{\ln(c\varepsilon - q)}e^{-\ln(c\varepsilon)}$$



$$\Rightarrow e^{-\frac{t}{R_1 c}} = \frac{(c\varepsilon - q)}{c\varepsilon} \Rightarrow q = c\varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{R_1 c}}\right)$$

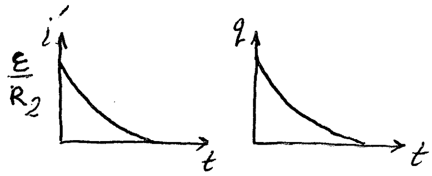
ب) خالی شدن خازن: پس از اینکه در مرحلهٔ الف، خازن c پر شد، کلید دوطرفه را از نقطهٔ a قطع و مطابق شکل زیر به نقطهٔ b متصل می‌کنیم
در این جریان مدار و بار خازن را بدست آورید.

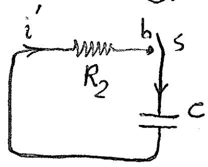
$$\begin{rcases} i'R_2 + \frac{q}{C} = 0 \\ i = -\frac{dq}{dt} \end{rcases} +R_2\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \int_{q_{max}}^{q} \frac{dq}{q} = -\int_0^t \frac{dt}{R_2 C}$$

$$[\ln q]_{q_{max}}^{q} = \left[\frac{-t}{R_2 C}\right]_0^t \Rightarrow \ln\frac{q}{q_{max}} = \frac{-t}{R_2 C} \Rightarrow q = q_{max}\, e^{\frac{-t}{R_2 C}} \Rightarrow q = C\varepsilon e^{\frac{-t}{R_2 C}}$$

در لحظهٔ خالی شدن خازن

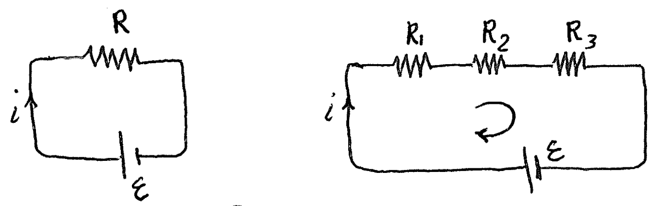
$$i' = \frac{-dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R_2} e^{-t/R_2 C}$$





* به هم بستن مقاومت‌ها و مقاومت معادل:

الف) به صورت متوالی:



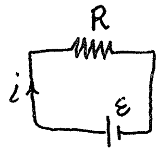
$$\varepsilon - iR_1 - iR_2 - iR_3 = 0$$

$$\varepsilon - i(R_1 + R_2 + R_3) = 0 \quad (2)$$

$$\varepsilon - iR = 0 \quad (1)$$

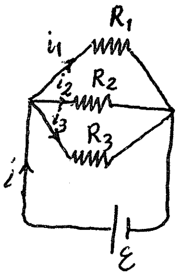
از مقایسه روابط ① و ② نتیجه می شود:

$\star\ R=R_1+R_2+R_3$ در حالت متوالی



$$\varepsilon - iR = 0$$

ب) به صورت موازی:



$$\begin{cases} \varepsilon - i_1R_1 = 0 \\ \varepsilon - i_2R_2 = 0 \\ \varepsilon - i_3R_3 = 0 \end{cases}$$

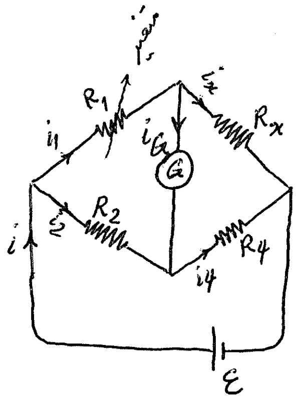
$$\star\ i = i_1 + i_2 + i_3$$

اما:

$$\star\ \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon}{R_1} + \frac{\varepsilon}{R_2} + \frac{\varepsilon}{R_3}$$

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$ در حالت موازی

* پل وتستون:



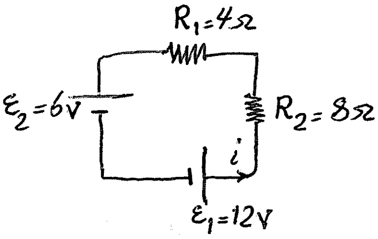
در حالت تعادل یعنی وقتی $i_G = 0$ داریم:

$$\begin{cases} i_1 = i_x \\ i_2 = i_4 \end{cases}$$

$$\star\ \frac{i_1R_1}{i_xR_x} = \frac{i_2R_2}{i_4R_4} \Rightarrow R_1R_4 = R_2R_x \Rightarrow \star\ R_x = \frac{R_1R_4}{R_2}$$

* مسئله 7 فصل 23 هالیدی:

انرژی مصرفی هر کدام از قطعات مدار را به دست آورید



$$+\varepsilon_1 - iR_2 - iR_1 - \varepsilon_2 = 0$$

$$i = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2} = \frac{12-6}{4+8} = 0/5A$$

$$P_{R_1} = R_1 i^2 = (4)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \quad , P_{R_2} = 8\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2$$

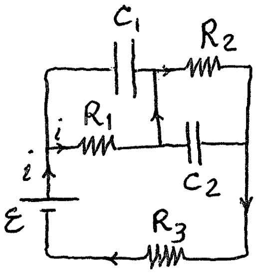
$$P_{\varepsilon_1} = \varepsilon_1 i = 12 \times \frac{1}{2} = 6 \quad , P_{\varepsilon_2} = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

$$\star\ P_{R_{\text{ها}}} + P_{\varepsilon_2} = P_{\varepsilon_1}$$

$$1 + 2 + 3 = 6$$

* مسئله 94 فصل 23 هالیدی:

در حالت تعادل انرژی ذخیره شده در مدار را به دست آورید.



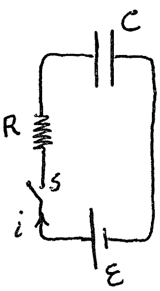
$$W = W_{C_1} + W_{C_2} = \frac{1}{2}C_1V_{C_1}^2 + \frac{1}{2}C_2V_{C_2}^2$$

$$\varepsilon - iR_1 - iR_2 - iR_3 = 0 \Rightarrow i = \frac{\varepsilon}{R_1+R_2+R_3}$$

$$V_{C_1} = iR_1 = \frac{\varepsilon R_1}{R_1+R_2+R_3} \quad , V_{C_2} = \frac{\varepsilon R_2}{R_1+R_2+R_3}$$

انرژی ذخیره شده در خازن به این صورت به دست می آید:

یادآوری:



$$\varepsilon - iR - \frac{q}{C} = 0 \quad , i = \frac{dq}{dt}$$

$$q = C\varepsilon\left(1 - e^{-t/RC}\right) \quad , i = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}$$

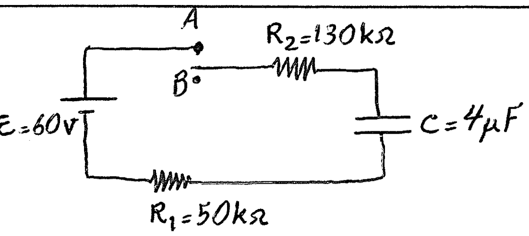
حل:

$q_{max} = C\varepsilon$ وقتی خازن کاملاً پر می شود.

$$W_C = \frac{1}{2}C\varepsilon^2 = \frac{q_{max}^2}{2C} \quad , W_\varepsilon = q_{max}\varepsilon = C\varepsilon^2$$

در مدار مقابل کلید در وضعیت A گذاشته می شود تا C پر شود. الف) ثابت زمانی شارژ مدار چقدر است؟
ب) جریان اولیه شارژ چقدر است؟

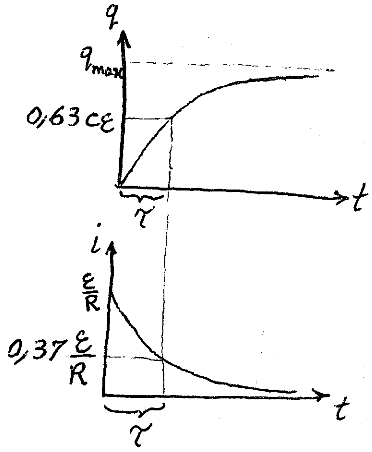
فصل 29 هودسون مسئلهٔ 60 :



نکتهٔ این مسئله :

$$*\ \tau=RC \qquad *\ q_t=C\varepsilon(1-e^{-t/RC})$$

$$*\ i_t=\frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}$$



$$\begin{cases} q_\tau=C\varepsilon(1-e^{-RC/RC})=C\varepsilon(1-\frac{1}{e})=C\varepsilon(1-\frac{1}{2{,}7})=0{,}63C\varepsilon=0{,}63q_{max} \\ i_\tau=\frac{\varepsilon}{R}e^{-RC/RC}=\frac{\varepsilon}{R}(\frac{1}{e})=0{,}37\frac{\varepsilon}{R}=0{,}37\,i_{max} \end{cases}$$

در زمان RC مقدار بار شارژ شده اینقدر است

حل بخش اول (اتصال کلید به نقطهٔ A) :

الف) $\tau=(R_1+R_2)C=(50+130)\times10^3\times4\times10^{-6}=720\times10^{-3}\,s$

ب) $i_0=\frac{\varepsilon}{R_1+R_2}=\frac{60}{(50+130)\times10^3}=\frac{1}{3}\times10^{-3}A$

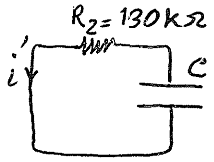
ج) چقدر طول می کشد تا C به اندازه 50 ولت شارژ شود؟
د) انرژی ذخیره شده در خازن کامل شارژ شده چقدر است؟
پس از شارژ کامل کلید را به حالت B می بریم

ج) $\frac{V_C}{\varepsilon}=1-e^{\frac{-t}{(R_1+R_2)C}} \Rightarrow \frac{50}{60}=1-e^{\frac{-t}{0{,}72}} \Rightarrow \frac{1}{6}=e^{\frac{-t}{0{,}72}} \Rightarrow \frac{-t}{0{,}72}=\ln\frac{1}{6}=\ln1-\ln6 \Rightarrow t=1{,}29s$

د) $W=\frac{q^2}{2C} \Rightarrow W_{max}=\frac{q_{max}^2}{2C}=\frac{1}{2}C\varepsilon^2=\frac{1}{2}\times4\times10^{-6}\times(60)^2$

حل بخش دوّم : درحالت اتصال به B (البته بعد از اینکه در بخش اوّل خازن کاملاً پر شده) $q_0=q_{max}=C\varepsilon$ این بخش

ه) ثابت زمانی تخلیه چقدر است؟
و) جریان اولیه دشارژ چقدر است؟
ز) ولتاژ دو سر C بلافاصله پس از تغییر وضعیت کلید به B چقدر است؟



$$+\frac{q}{C}-i'R_2=0$$

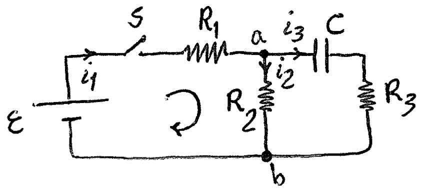
$$\tau=R_2C \Rightarrow \tau=130\times10^3\times4\times10^{-6}=0{,}52s$$

$$i'_0=\frac{q_0}{R_2C}=\frac{C\varepsilon}{R_2C}=\frac{\varepsilon}{R^2}=\frac{60}{130\times10^3}=\frac{6}{13}\times10^{-3}A$$

$$i'=\frac{q_0}{R_2C}e^{-t/R_2C}$$

$$q=q_0e^{\frac{-t}{R_2C}} \Rightarrow V_C=\varepsilon e^{-t/R_2C}=60e^{-1/0{,}52}=8{,}79\,V$$

مسئله 62 فصل 29 هودسون :

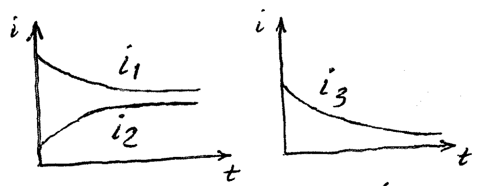


بخش اوّل : کلید در لحظهٔ $t=0$ بسته می شود :

$$i_1-i_2-i_3=0$$

$$\varepsilon-i_1R_1-i_2R_2=0 \quad و \quad \varepsilon-i_1R_1-\frac{q}{C}-i_3R_3=0 \quad و \quad i_3=\frac{dq}{dt}$$

$$\left.\begin{matrix} R_i=(R_2 \parallel R_3)\ \text{متوالی با}\ R_1 \\ R_f=(R_2)\ \text{متوالی با}\ R_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad R_i<R_f$$

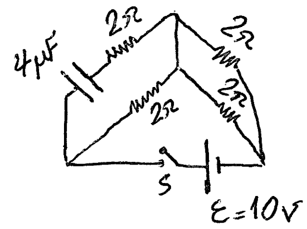


بخش دوّم : پس از اینکه خازن کاملاً پر شده کلید قطع می شود.

$$q=q_0e^{\frac{-t}{(R_2+R_3)C}} \qquad i=\frac{-dq}{dt}=\frac{q_0}{(R_2+R_3)C}e^{\frac{-t}{(R_2+R_3)C}}$$

at $t=\infty$ $\quad \varepsilon-i_1R_1-i_2R_2=0 \Rightarrow i_1=i_2=i=\frac{\varepsilon}{R_1+R_2}$ ، $V_{ab}=V_C=iR_2=\frac{\varepsilon R_2}{R_1+R_2}$ ، $q_{max}=\frac{C\varepsilon R_2}{R_1+R_2}=q_0$

چند تمرین از فصل مدارها:

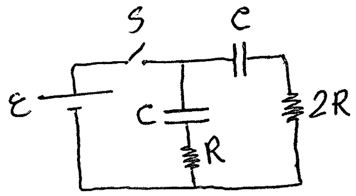


تمرین 1: در شکل زیر قبل از اتصال کلید، خازن بدون بار است.

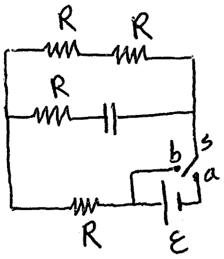
الف) روابط لازم برای بدست آوردن جریان هر شاخه را در یک زمان دلخواه t بنویسید.

ب) در لحظه $t=0$ (لحظه اتصال کلید) شدت جریان I چقدر است؟

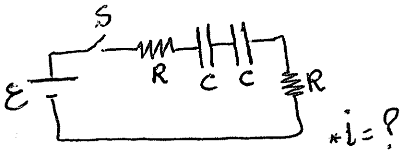
ج) وقتی خازن کاملاً پر می‌شود، بار ذخیره شده در آن چقدر است؟



تمرین 2: در مدار شکل زیر پس از بسته شدن کلید، جریان هر شاخه را بدست آورید.
(قبل از اتصال کلید خازنها بدون بارند)

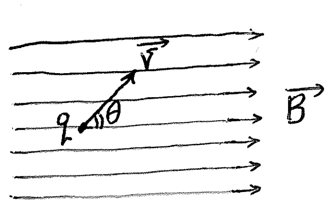


تمرین 3: بخش اول- کلید به نقطه a متصل می‌شود پس از پر شدن کامل خازن بار آن چقدر است؟
بخش دوم- پس از اینکه خازن در بخش اول پر شد کلید از a قطع و به b می‌رسد (وصل می‌شود)
در این حالت جریان عبوری از خازن را بر حسب زمان و سایر داده‌های مسئله بدست آورید.



تمرین 4: در مدار شکل روبرو پس از بسته شدن کلید جریان عبوری I چقدر است؟

فصل 30 «میدان مغناطیسی»



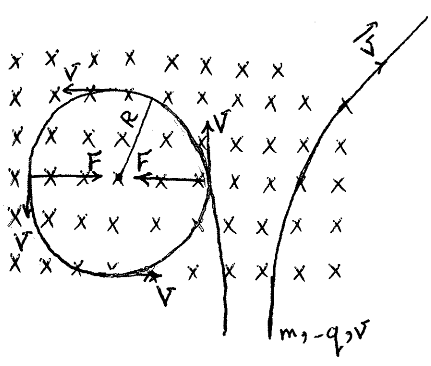
تعریف و تعیین $\vec{B}$: داشتیم، $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q}$

$$\vec{F}_B = q\,\vec{V} \times \vec{B}$$

$$F_B = qVB\sin\theta \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{F}_B}{qV\sin\theta}$$

واحد $\vec{B}$: $\dfrac{N}{C\cdot m/s} = \dfrac{N\cdot m}{A\cdot m^2} = \dfrac{weber}{m^2} = Tesla\,(T)$

$1T = 10^4 G$
یکای B در دستگاه M.K.S تسلا (T) است.
یکای B در دستگاه C.G.S گاوس (G) است.



$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{mv^2}{R} \\ F &= qVB\sin\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow qVB = \frac{mV^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mV}{qB}$$
شعاع دایره دوران

$$\begin{cases} V = R\omega \Rightarrow \omega = \dfrac{qB}{m} \\ \omega = 2\pi f \end{cases}$$ و $f = \dfrac{\omega}{2\pi} \Rightarrow f = \dfrac{qB}{2\pi m}$ بسامد یا فرکانس

دوره تناوب $T = 1/f$

تمرین ۱

الف)

$$\begin{cases} i = i_1 + i_2 \\ 10 - 2i_1 - i = 0 \\ 10 - \frac{q}{4\mu} - 2\frac{dq}{dt} - i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = i - i_2 \\ i = 10 - 2i_1 = 10 - 2(i - i_2) \\ \Rightarrow i + 2i = 10 + 2i_2 \Rightarrow i = \frac{10 + 2i_2}{3} = \frac{10 + 2\frac{dq}{dt}}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 10 - \frac{q}{4\times10^{-6}} - 2\frac{dq}{dt} - \frac{10 + 2dq/dt}{3} = 0 \Rightarrow \frac{10^6}{4}q + \frac{8}{3}q' = 10 - \frac{10}{3} = \frac{20}{3}$$

جواب همگن: $\frac{8}{3}q' + \frac{10^6}{4}q = 0 \Rightarrow q' = -\frac{3}{8}\times\frac{10^6}{4}q \Rightarrow q = c_1 e^{-9.375\times10^4 t}$

جواب خصوصی $\frac{10^6}{4}\times N = \frac{20}{3} \Rightarrow N = \frac{20}{3}\times\frac{4}{10^6} = \frac{8}{3}\times10^{-5}$

$$\Rightarrow q = c_1 e^{-9.375\times10^4 t} + \frac{8}{3}\times10^{-5} \quad , \xrightarrow{t=0 \to q=0} c = -\frac{8}{3}\times10^{-5} \Rightarrow q = -\frac{8}{3}\times10^{-5}\left(e^{-9.375\times10^4 t} - 1\right)$$

$$, i_2 = 2.5e^{-9.375\times10^4 t} \quad , i = \frac{10}{3} + \frac{5}{3}e^{-9.375\times10^4 t} \quad , i_1 = \frac{10}{3} - \frac{5}{6}e^{-9.375\times10^4 t}$$

$$i_3 = i_4 = \frac{i}{2} = \frac{5}{3} + \frac{5}{6}e^{-9.375\times10^4 t}$$

ب)

$$t = 0 \Rightarrow i = \frac{5}{3} + \frac{10}{3} = 5A$$

ج)

$$q = -\frac{8}{3}\times10^{-5}\left(e^{-9.375\times10^4 t} - 1\right) \xrightarrow{t\to\infty} q = \frac{8}{3}\times10^{-5}$$

تمرین ۲ خازن ولتاژ به دو سر هر دو وصل شده هر کدام یک مدار RC ساده هستند

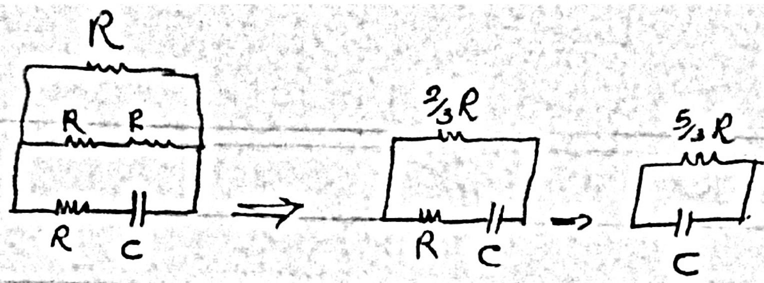
$$q_1 = C\varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \qquad q_2 = C\varepsilon\left(1 - e^{-t/2RC}\right)$$

تمرین ۳ الف) پس از پر شدن کامل خازن جریان شاخه خازن صفر می‌شود ← جریان نهایی $= \frac{\varepsilon}{3R} \Rightarrow v_c = \frac{\varepsilon}{3R}\times 2R$

$$\Rightarrow v_c = \frac{2}{3}\varepsilon \Rightarrow \quad q = Cv_c = \frac{2}{3}\varepsilon C$$

3- ب) وقتی کلید به حالت b می رود

وقتی مدار را ساده می کنیم به یک مدار RC ساده تبدیل می شود.

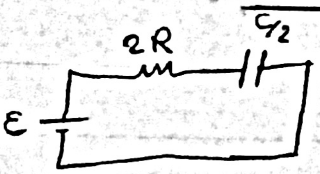


$$q_0 = \frac{2}{3}\varepsilon C \Rightarrow v_0 = \frac{2}{3}\varepsilon \Rightarrow i_0 = \frac{2/3\,\varepsilon}{5/3\,R} = \frac{2\varepsilon}{5R}$$

چون جریان از مقدار اولیه با ثابت زمانی $\frac{5}{3}RC$ کم می شود تا به صفر برسد:

$$i = \frac{2\varepsilon}{5R} e^{-\frac{3t}{5RC}}$$

تمرین ۴- مدار معادل ←



مقاومت معادل $= R + R = 2R$

$$\frac{1}{C_t} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} \Rightarrow C_t = \frac{C}{2}$$

$i_0 = \varepsilon/2R \qquad i_\infty = 0 \qquad \tau = RC$

$$\Rightarrow i = \frac{\varepsilon}{2R} e^{-t/RC}$$