بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه جیرفت

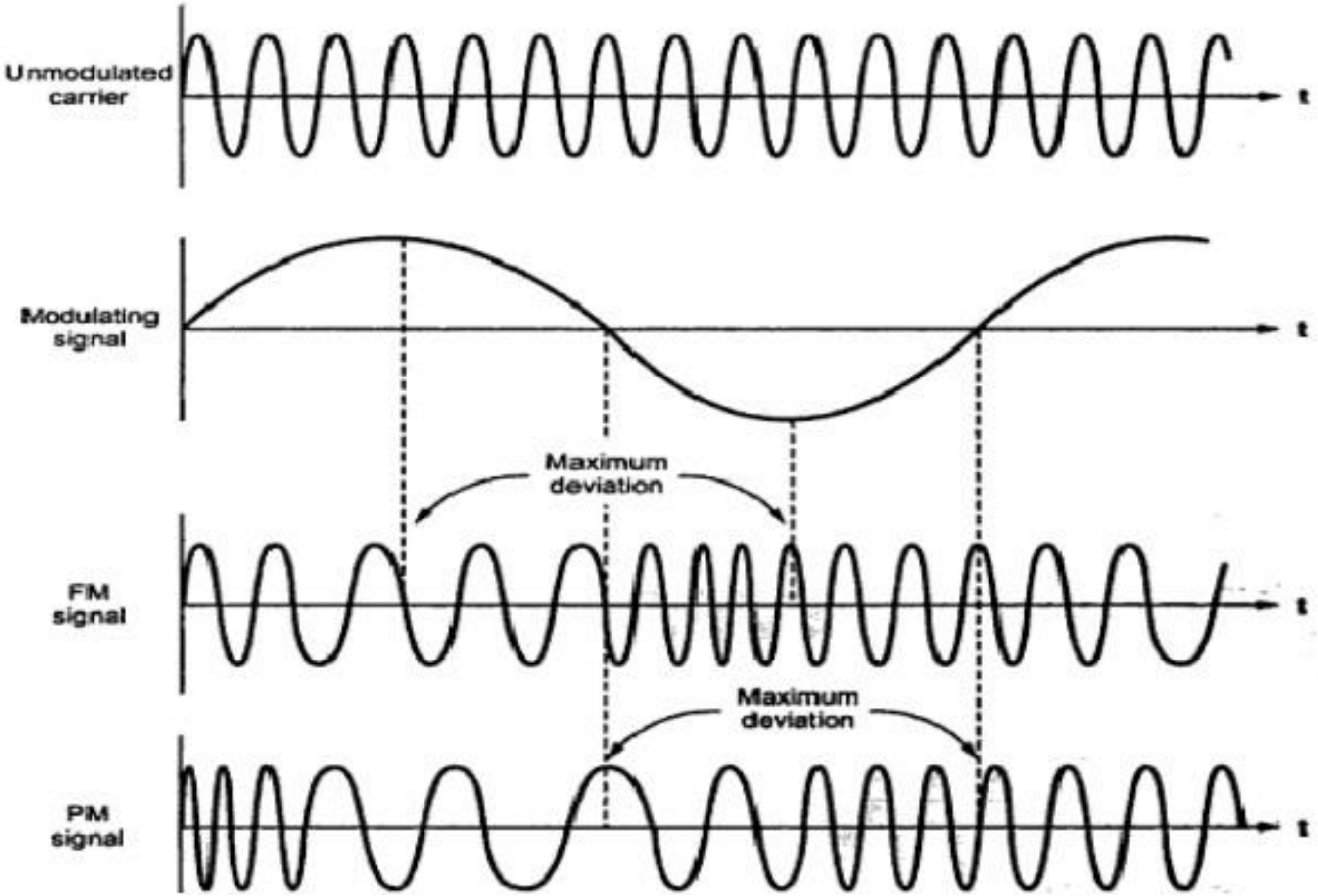
سیستمهای مخابراتی

جلسه ۱۵

مدرس: دکتر محمد هاشمی نژاد

مدولاسیون زاویه‌ای:

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه جیرفت



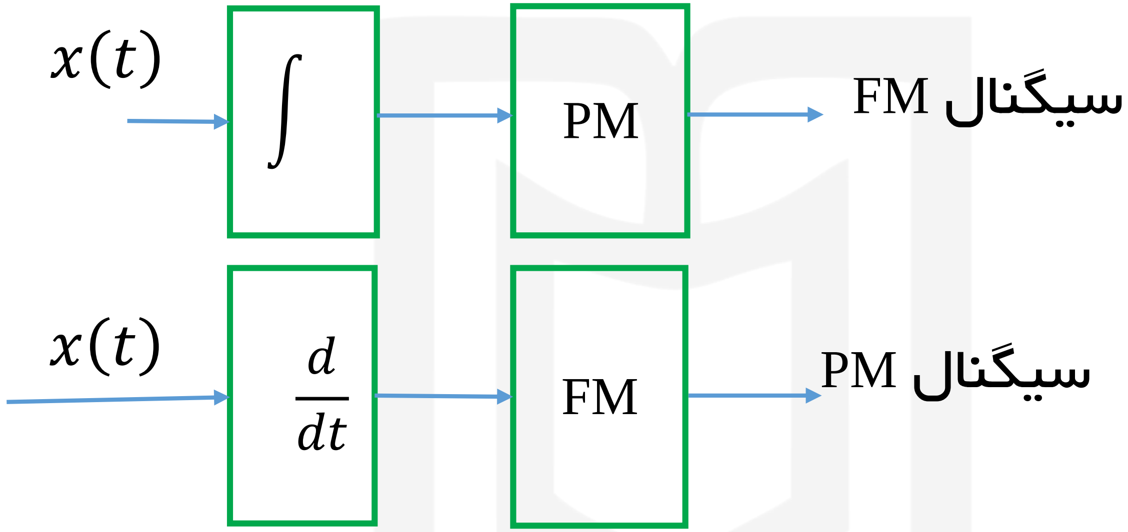
- می‌توان گفت اطلاعات روز zero crossing سیگنال منتقل می‌شود.
- در جلسه قبل دو سوال مطرح شد:
- پیچیدگی گیرنده
- پهنای باند (مهم)
- اثر نویز

تعاریف اولیه

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه جیرفت

- $x_c(t) = \underbrace{A_c}_{\text{ثابت}} \cos\left(\underbrace{\theta_i(t)}_{\text{اطلاعات}}\right)$
- از روی فاز $\theta_i(t)$ می‌توانیم فرکانس $f_i(t)$ (فرکانس لحظه‌ای) را تعریف کنیم.
- $f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta_i(t)}{dt}$
- مدولاسیون زاویه‌ای
  - مدولاسیون فاز (PM):
    - $\theta_i(t) = 2\pi f_c t + \phi_\Delta x(t) \Rightarrow x_c(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + \phi_\Delta x(t)\right)$
  - مدولاسیون فرکانس (FM): از آنجا که فرکانس مشتق فاز است، فاز انتگرال فرکانس است.
    - $f_i(t) = f_c + f_\Delta x(t) \Rightarrow \; x_c(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi f_\Delta \int x(\tau)d\tau\right)$

تبدیل سیگنال مدوله شده PM به FM



- تمرکز ما بر FM است.

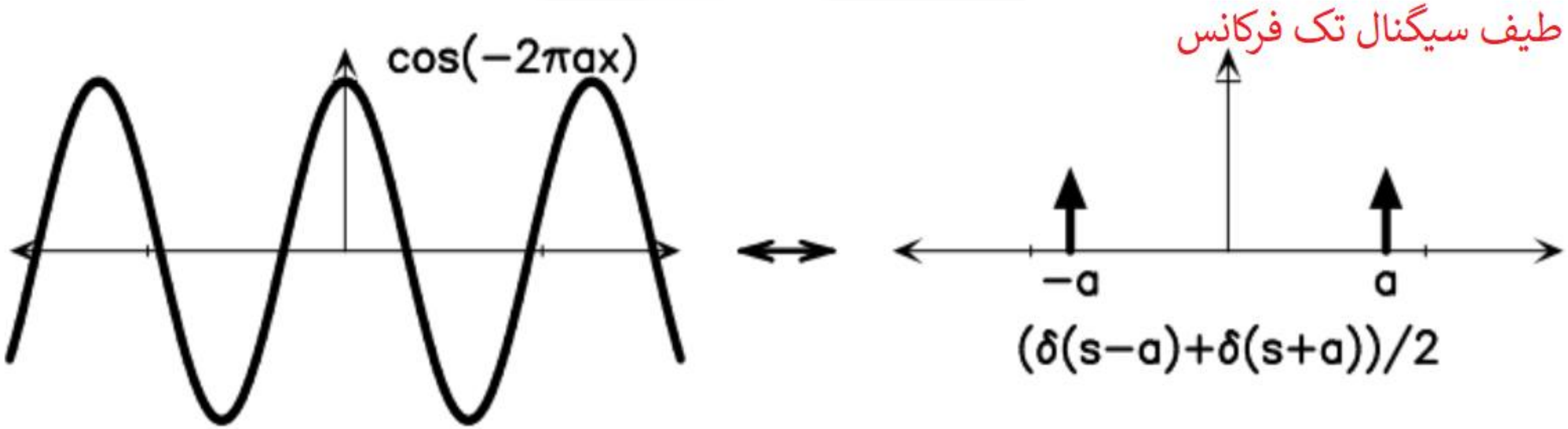
مدولاسیون FM

- $x_c(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi f_\Delta \int x(\tau) d\tau\right) \xRightarrow{\text{فرکانس لحظه‌ای}} f_i(t) = f_c + f_\Delta x(t)$

- محاسبه پهنای باند سیگنال مدوله شده از روی طیف سیگنال اصلی:
- چون $x(t)$ در فاز کسینوس رفته است محاسبات را مشکل می‌کند.
- از حالت ساده و خاص شروع می‌کنیم. یعنی سیگنال تک فرکانس:

$$x(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$$

سیگنال تک فرکانس



$$x_c(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + \frac{\overbrace{\Delta f}^{\beta}}{f_m}\sin(2\pi f_m t)\right), where\ \Delta f = f_{\Delta} A_m \rightarrow frequency\ duration$$

سیگنال تک فرکانس

- فرکانس لحظه‌ای: f_i

- $f_i(t) = f_c + f_\Delta A_m \cos(2\pi f_m t) = f_c + \Delta f \cos(2\pi f_m t)$
- $\Rightarrow x_c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t))$

- طیف این سیگنال به چه شکل است؟ 😟
- فرکانس لحظه‌ای $f_c + \Delta f \cos(2\pi f_m t)$ بود. پس مقدار بیشینه نوسانات آن حول فرکانس حامل Δf است. 😍😍
- آیا بیش از این محدوده هم فرکانس داریم؟
- آیا مؤلفه‌های فرکانس فقط در محدوده ثابتی حول f_c هستند که با $f_i(t)$ مشخص می‌شوند؟

سیگنال تک فرکانس

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه جیرفت

- اگر f_m خیلی کوچک باشد: همان حول f_i است.
- اگر f_m خیلی بزرگ باشد: علاوه بر مقدار فرکانس لحظه‌ای نرخ تغییرات فرکانس لحظه‌ای خودش باعث تولید طیف فرکانسی می‌شود. پس فقط مقدار فرکانس لحظه‌ای نیست که مهم است. نرخ تغییرات فرکانس لحظه‌ای ممکن است مهمتر شود. پس ممکن است طیف کلی را خیلی بزرگتر کند. پس مسئله به دو حالت تقسیم می‌شود:

- حالت $Narrow\text{-}band\ FM\ (\beta \ll 1)$ $\Delta f = f_\Delta A_m$, $\beta = \frac{\Delta f}{f_m}$
- حالت کلی $Wide\text{-}band\ FM\ (\beta \gg 1)$

سیگنال تک فرکانس

- حالت $Narrow\text{-}band\ FM$ $(\beta \ll 1)$:

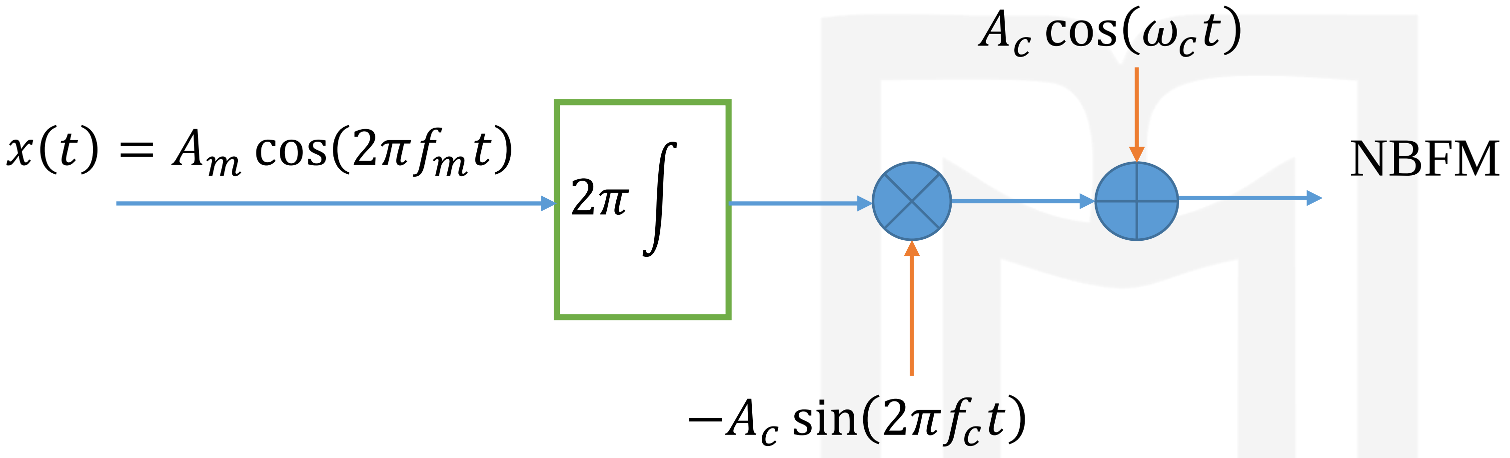
$$\beta \ll 1 \Rightarrow x_c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t))$$
$$= A_c \cos(2\pi f_c t) \cos(\beta \sin(2\pi f_m t)) - A_c \sin(2\pi f_c t) \sin(\beta \sin(2\pi f_m t)) \Rightarrow$$
$$x_c(t) \approx A_c \cos(2\pi f_c t) - A_c \sin(2\pi f_c t) \times \beta \sin(2\pi f_m t)$$

- طیف این سیگنال قابل محاسبه است چون سینوس از داخل کسینوس خارج شد و طیفها به صورت عادی در آمدند. جمله سمت چپ که ثابت است و جمله سمت راست جابجایی فرکانس f_m به اندازه f_c است.

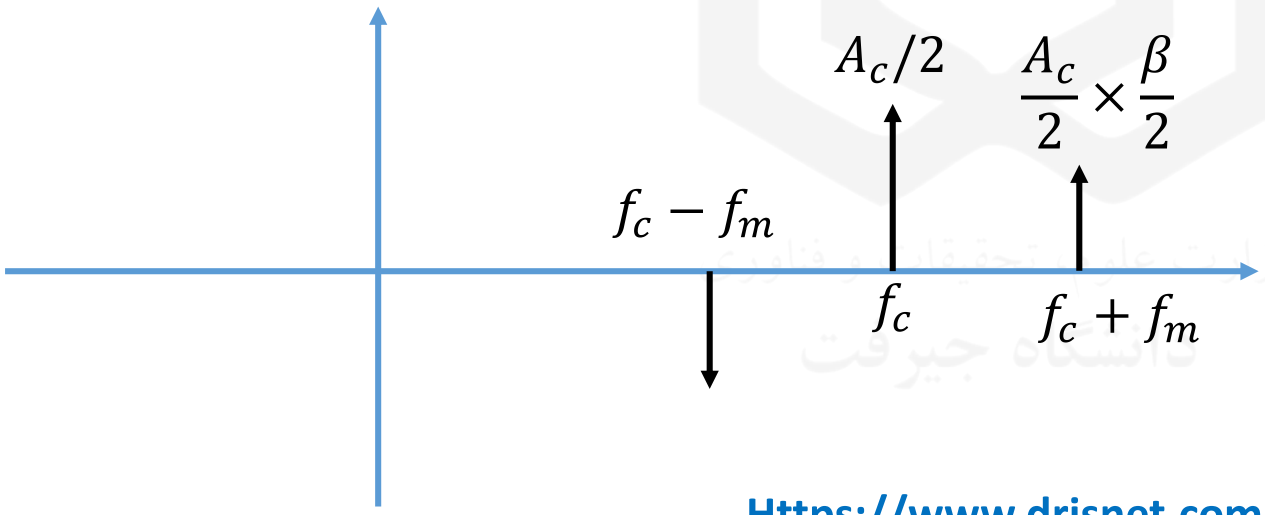
- اگر به جای $\sin(2\pi f_m t)$ از انتگرال ورودی $(x(t) = A_m \cos(2\pi f_m t))$ استفاده کنیم.

$$x_c(t) \approx A_c \cos(2\pi f_c t) - A_c \sin(2\pi f_c t) \times 2\pi \int \underbrace{A_m \cos(2\pi f_m t)}_{x(t)}\, dt$$

سیگنال تک فرکانس



- طیف $x_c(f)$:



$\beta \gg 1$ WBFM حالت

$$x_c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t))$$

- اگر $x_c(t)$ پریودیک باشد طیف راحت با سری فوریه بدست می‌آید. ولی در حالت کلی پریودیک نیست و بسط فوریه ندارد!.
- 😳 برای اینکه بتوانیم به نوعی از یک سیگنال پریودیک «در داخل» $x_c(t)$ استفاده کنیم.
- $x_c(t) = Re\left[A_c e^{j(2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t))}\right] = Re\left[\underbrace{A_c e^{j\beta \sin(2\pi f_m t)}}_{\tilde{x}_c(t)} e^{j2\pi f_c t}\right]$

حالت WBFM $\beta \gg 1$

- آیا $\tilde{x}_c(t)$ پریودیک هست یا نیست؟ پریودیک است! چون مؤلفه $2\pi f_c t$ داخل سینوس ندارد و فقط $2\pi f_m t$ دارد و ضرایب سری فوریه آن قابل محاسبه است.
- $\tilde{x}_c(t) = \sum c_n e^{j2\pi n f_m t}$
- که در آن c_n ضرایب سری فوریه هستند. که اگر فرض کنیم $x \triangleq 2\pi f_m t$ آنگاه
- $c_n = A_c \times J_n(\beta)$
- که در آن
- $J_n(\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta \sin x - nx)} dx$
- تابع بسل نوع اول از درجه n با پارامتر β است.

$\beta \gg 1$ WBFM حالت

- $x_c(t) = A_c Re\left[\sum J_n(\beta) e^{j2\pi t(f_c - nf_m)}\right] = A_c \sum J_n(\beta)\cos(2\pi(f_c - nf_m)t)$

- این رابطه نشان می‌دهد که طیف FM هر جایی نمی‌تواند باشد. دقیقاً در f_c و در مقادیری با فاصله‌های f_m از هم که دامنه آنها از روی $J_n(\beta)$ مشخص می‌شود.

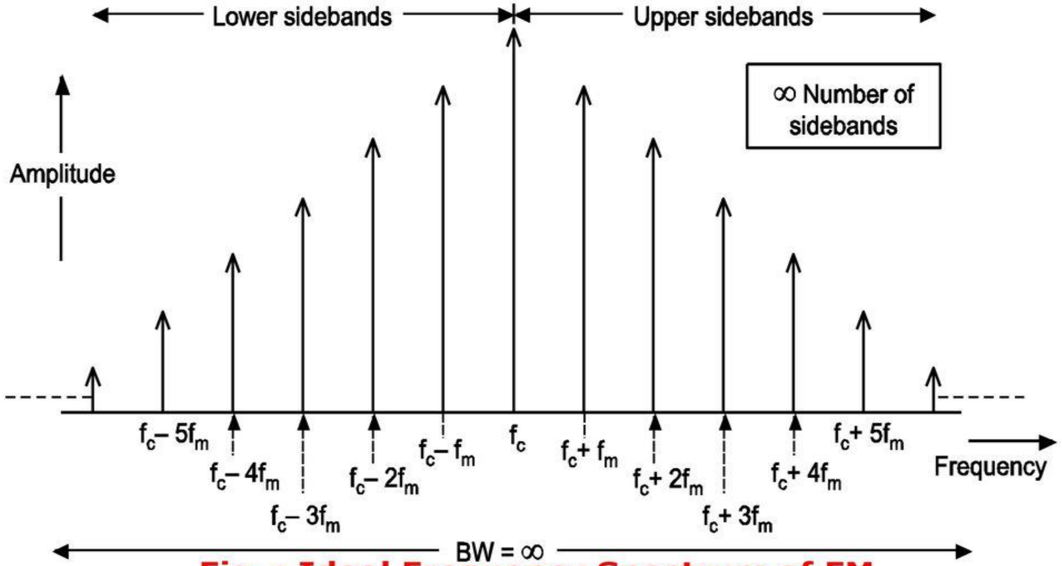
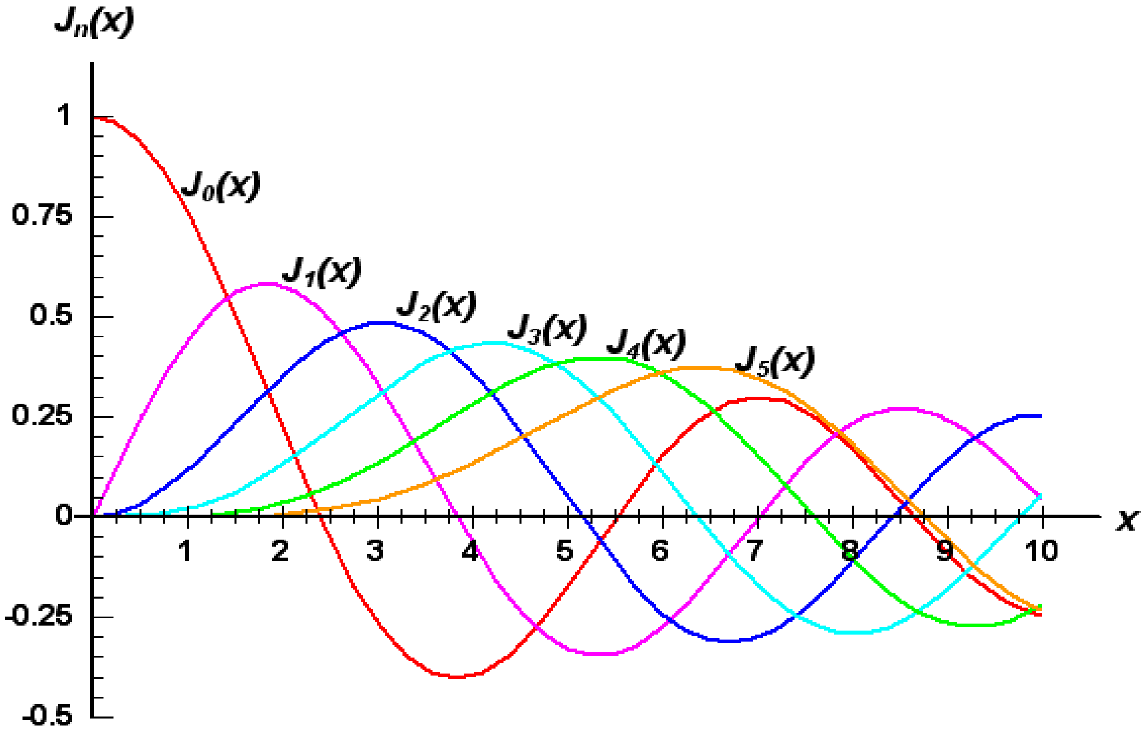


Fig. : Ideal Frequency Spectrum of FM

Https://www.drisnet.com

حالت WBFM $\beta \gg 1$

- در نتیجه طیف سیگنال FM تا بینهایت است. $B=\infty$
- با این حال با افزایش n دامنه کم می‌شود. و می‌توان یک پهنای باند مؤثر برای آن در نظر گرفت.



حالت WBFM $\beta \gg 1$

- نتایج:

1) پهنای باند واقعی FM حتی در ساده‌ترین حالت که سیگنال ورودی $x(t)$ تک فرکانس است بینهایت است.

2) در حالت خاص NBFM که متغیر β خیلی کوچک است پهنای باند $2f_m$:

- $J_0(\beta) \simeq 1,\ J_1(\beta) \simeq \frac{\beta}{2},\ J_{-1}(\beta) \simeq -\frac{\beta}{2},\ J_n(\beta) \simeq 0 \quad n > 1$

3) در حالت کلی کاریر وجود دارد.

حالت WBFM $\beta \gg 1$

- سؤال: نقش f_m و A_m در طیف سیگنال FM چیست؟
- **حالت اول**، f_m ثابت و A_m متغیر: طبیعتا با تغییر دامنه چون FM است طیف باید تغییر کند چون اطلاعات در فرکانس رفته است.
- $\Delta f = f_\Delta A_m , \beta = \frac{\Delta f}{f_m}$
- طیف را در سه حالت زیر رسم کنید:
- $\beta = 1, \beta = 2, \beta = 5$

حالت WBFM $\beta \gg 1$

- در حالت بالا با افزایش β پهنای باند زیاد می‌شود.

- **حالت دوم**، f_m متغیر و A_m ثابت:

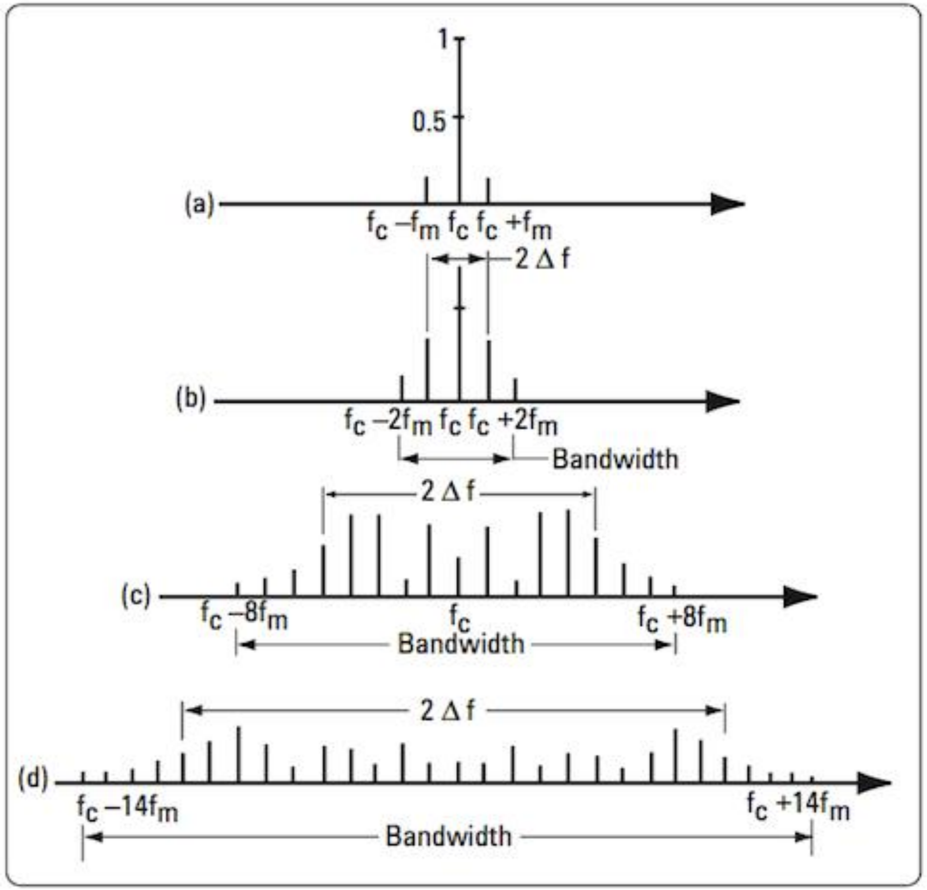
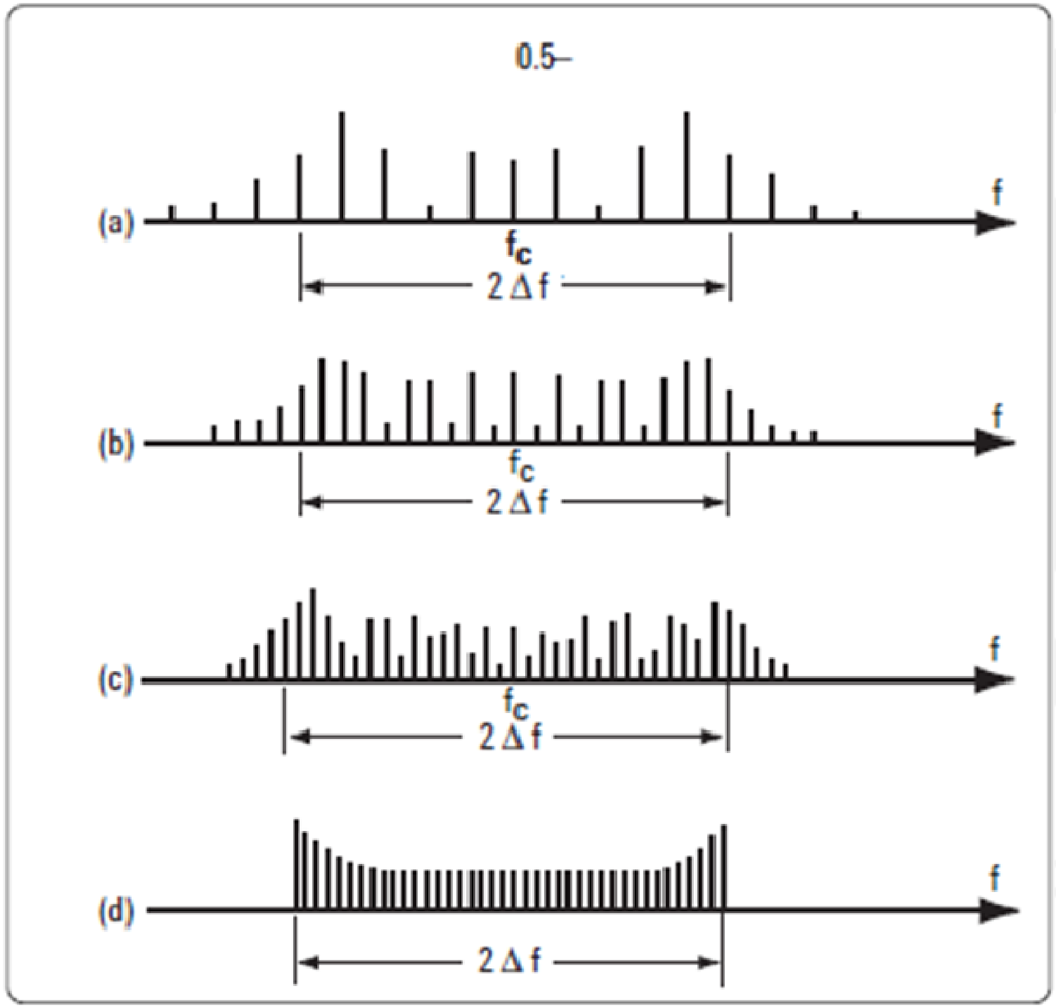


Figure 22. Amplitude-frequency spectrum of an FM signal (sinusoidal modulating signal; f fixed; amplitude varying). In (a), β = 0.2; in (b), β = 1; in (c), β = 5; in (d), β= 10

حالت $\beta \gg 1$ WBFM



- در این حالت با افزایش β پهنای باند زیاد نمی‌شود ولی فرکانس‌های موجود فشرده‌تر می‌شوند.