بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

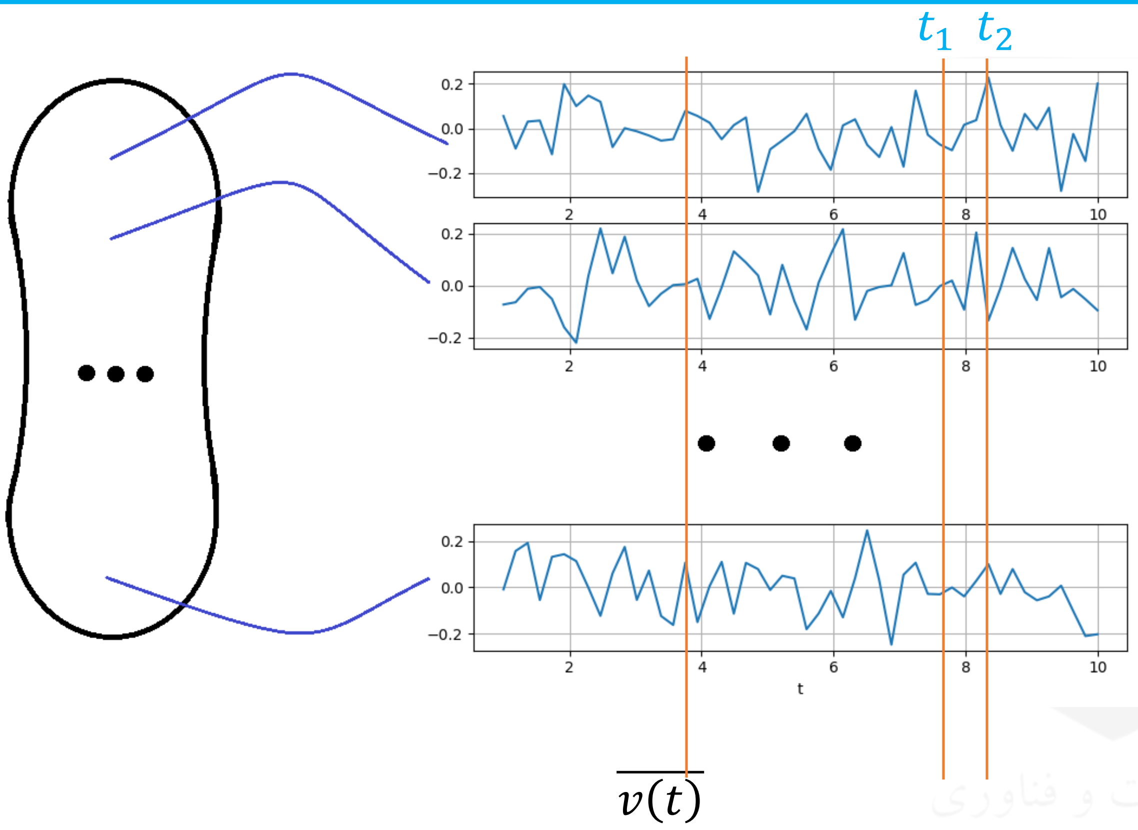
دانشگاه جیرفت

سیستمهای مخابراتی

جلسه ۱۰

مدرس : دکتر محمد هاشمی نژاد

مروری بر گذشته



- فرایندهای تصادفی
- فرایندهای ایستا
- فرایندهای ارگودیک
  - متوسط زمانی و متوسط آماری
- تابع همبستگی برای دو زمان مختلف
- روش محاسبه متوسط آماری:
  - اگر سیگنال ساده باشد همانند مثالها می‌شود.
  - اگر پیچیده باشد عملا به سادگی امکان پذیر نیست.
- روش استفاده از خاصیت فرایندهای ارگادیک
  - مثال: تابع تک فرکانس که حل شد.
  - از روی متوسط زمانی توابع نمونه بدست می‌آید.

$$\overline{v(t)} = \langle v(t) \rangle = 0 \qquad R_v(t_1, t_2) = R_v(\tau) = \langle v(t)v(t-\tau) \rangle$$

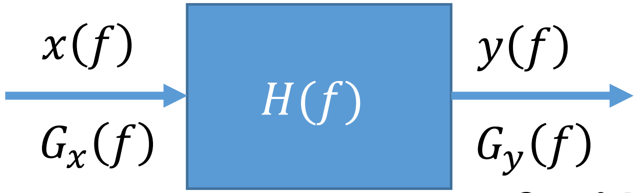
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه جیرفت

خواص فرایندهای ارگودیک

- متوسط آماری با متوسط زمانی برابر است.
- متوسط آماری یک عدد است و به زمان بستگی ندارد.
- همبستگی: $R_v(t_1,t_2) = R_v(\tau) = \langle v(t)v(t-\tau)\rangle$
- برای اینکه فرایند ارگودیک باشد باید ایستا هم باشد.
- باید متوسط زمانی همه توابع نمونه مساوی هم باشند. (مقدار ثابت)
- خودهمبستگی همه توابع نمونه باید یکسان باشد.
- در عمل کار با فرایندهای ارگودیگ بسیار راحتتر است و اگر نباشند کار بسیار سخت خواهد بود.
- هر فرایند ایستایی لزوما ارگادیک نیست. هر فرایند ارگادیکی ایستا است.

محتوای فرکانسی

- هدف رسیدن به تابع طیف توان و انرژی است. $G(f)$
- دو خاصیت این تابع:
  - ۱) $P=\int_{-\infty}^{\infty} G(f)df$
  - ۲) در عبور سیگنال از یک سیستم خطی LTI، دامنه سیگنال در فرکانس f در عبور از این سیستم به میزان $|H(f)|^2$



$$\boldsymbol{G_y(f)=|H(f)|^2G_x(f)}$$

- $G_x(f)$ را چگونه تعریف کنیم که دو خاصیت فوق برای ان وجود داشته باشد؟
  - جواب را برای سیگنالهای معین می‌دانیم. ✓ تابع خود همبستگی $R_x(\tau)\rightarrow \mathcal{F}\big(R_x(\tau)\big)\rightarrow |x(f)|^2$
  - برای سیگنالهای تصادفی؟

محتوای فرکانسی

- برای سیگنال‌های تصادفی قضیه Wiener Kintchine استفاده می‌شود:
  - برای فرایند ایستای $v(t)$: اگر تابع $G_v(f)$ را به صورت زیر تعریف کنیم، خواص فوق برای تابع $G_v(f)$ حاصل برقرار خواهد بود.
  - $G_v(f) = \mathcal{F}\left(R_v(\tau)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} R_v(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$
- در اینجا ایده اصلی به این صورت است: برای اینکه محتوای فرکانسی فرایند را بدست آوریم، مشخص است که این محتوا از روی توابع نمونه بدست می‌آید که به صورت تک تک نداریم و رفتار تصادفی آنها را داریم. می‌توانیم یک فرایند تصادفی دیگر تعریف کنیم که یک جور مفهوم تبدیل فوریه فرایند است.

$V_T(f,s)$ ← مفهوم تبدیل فوریه فرایند

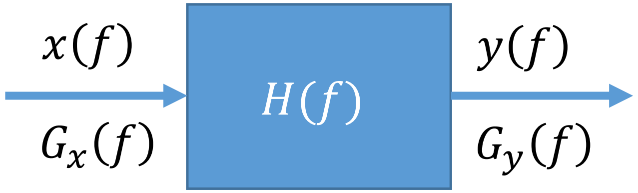
← تعریف توابع از روی بازهٔ T

$$\lim_{T\to\infty} E\left[\underbrace{|V_T(f,s)|}_{v_T(t,s)\ \text{تبدیل فوریه}}{}^2\right] = \mathcal{F}[R_v(\tau)]$$

مفهوم فرکانس

خواص $G_v(f)$

- خاصیت اول:
- $G_v(f) \triangleq \mathcal{F}\big(R_v(\tau)\big)$ بر حسب $\overline{v^2(t)}$ =?
- $\overline{v^2(t)} = E[v(t)v(t)] = R_v(0) \rightarrow R_v(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G_v(f)df$
- این کل توان را به ما خواهد داد.
- خاصیت دوم :
- رابطه بین $G_y(f)$ و $G_x(f)$ چیست؟

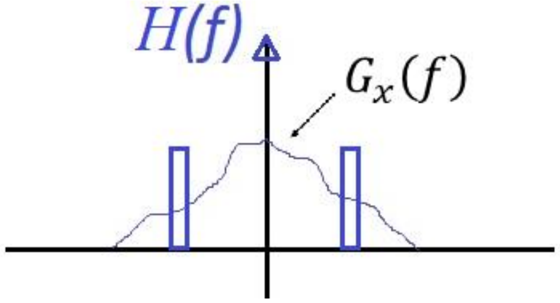


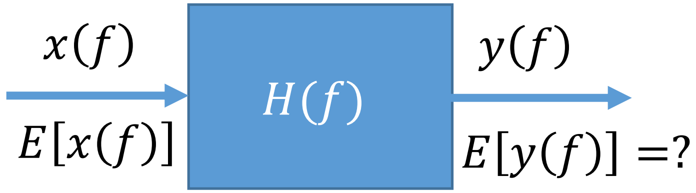
- $G_y(f) = R_y(\tau)$ است پس اولین قدم بدست آوردن $R_y(\tau)$ است. سپس تبدیل فوریه آن.
- $R_y(\tau) = E[y(t)y(t-\tau)] \xRightarrow{\text{اثبات می‌شود}} R_y(\tau) = R_x(\tau) \times h(\tau) \times h(-\tau)$

مثال حالت ساده‌تر

- $R_{xy}(\tau)$
- نکته ۱: برای $R_{xy}(t_1,t_2)$ در نهایت اگر $t_1 - t_2$ شد به جای آن τ می‌نویسیم.
- $R_{xy}(t_1,t_2) = E[y(t_1), x(t_2)] = E\left[\int h(\lambda)x(t_1-\lambda)d\lambda\, , x(t_2)\right]$
- $= E\left[\int h(\lambda)x(t_1-\lambda)x(t_2)d\lambda\right] = \int h(\lambda)E[x(t_1-\lambda)x(t_2)]d\lambda$
- $\xrightarrow{\text{با فرض ایستا بودن ورودی}} = \int h(\lambda)R_x(t_1-\lambda-t_2)d\lambda = \int h(\lambda)R_x(\tau-\lambda)d\lambda$

$= R_x(\tau) * \mathrm{h}(\tau)$





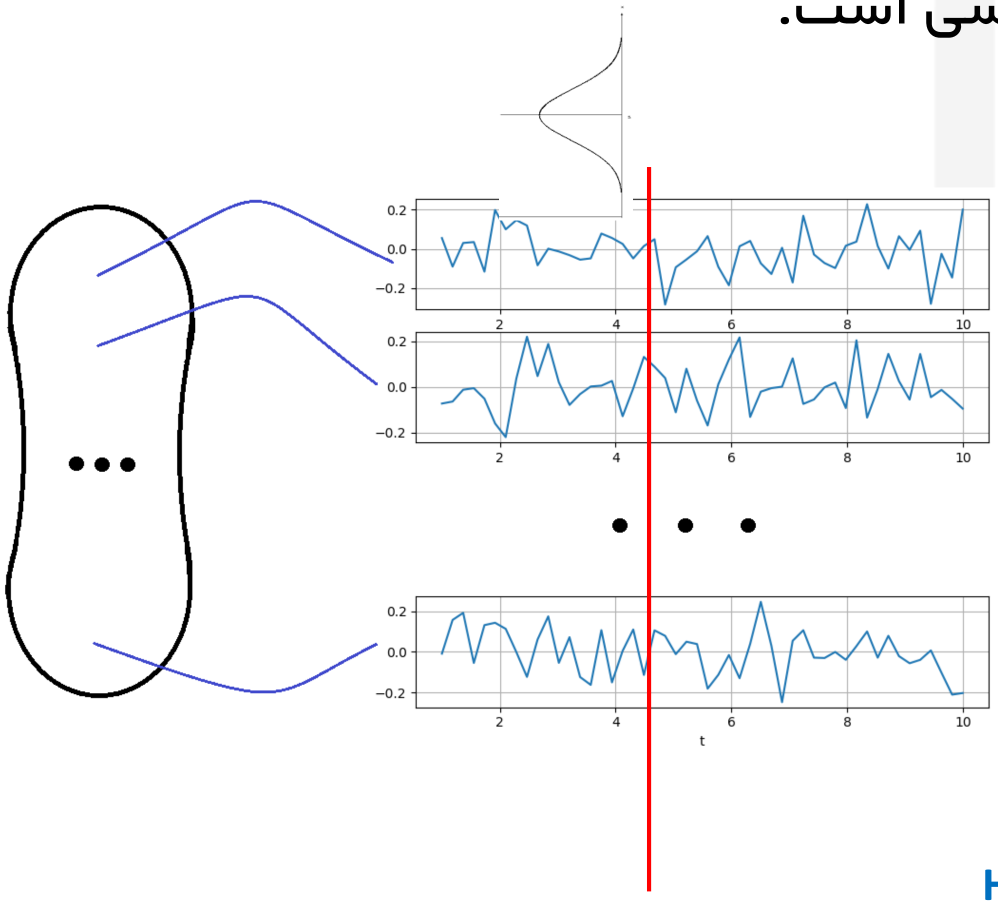
- حالت خاص:
  - در اینجا سیگنال از یک فیلتر میانگذر باند باریک عبور کرده است:
  - $G_y(f) = G_x(f).|H(f)|^2$ مفهوم محتوای فرکانسی حور فرکانس خاص
- همچنین در عبور از فیلتر LTI مقدار متوسط (آماری) خروجی:
  - $E[y(f)] = E[x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda] = E[x(f)].\int h(t-\lambda)d\lambda = E[x(f)].\mathrm{H}(0)$
  - $\overline{y^2} = R_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f).|H(f)|^2 df$ توان متوسط خروجی
- پس تمام مقادیر متوسط آماری درجه ۱ و ۲ از روی ورودی و مقدار $H(f)$ محاسبه خواهد شد.

نویز

- برای فرایندهای ایستا و عبور از سیستم LTI می‌توان از روی این آنالیزها استفاده کرد.
- اگر فرایند ایستا نباشد آنالیز پیچیده‌تر خواهد بود
- اینها مقدمه‌ای برای رسیدن به موضوع نویز بود.
- نویز یک مفهوم بسیار کلی است.
- در این درس ما به دنبال مفهومی از نویز هستیم که بتوانیم تحلیل را با استفاده از آن انجام دهیم که یک مدل مناسب نویز را داریم.
- نویز گوسی (Gaussian noise) دسته مهمی از نویزها که با آن شروع می‌کنیم.
  - مدل واقعی تقریبا مشابه نویز گوسی است.
  - قابلیت به نسبت ساده تحلیل

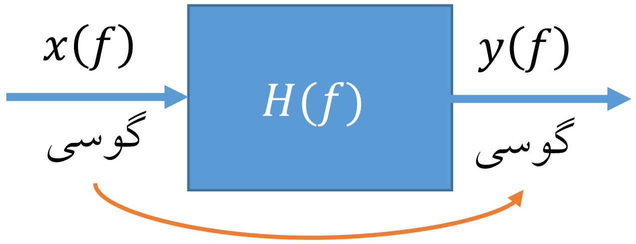
نویز گوسی

- فرایند تصادفی $v(t)$ را گوسی می‌گوییم که $p_{v(t)}(v)$ برای تمامی لحظات اگر برای هر برش زمانی باشد، گوسی است. پس تابع چگالی احتمال آن گوسی است.
- همچنین: $P_{v(t_1)v(t_2)}(v_1,v_2)$ مشترکاً گوسی
- $P_{v(t_1)\dots v(t_N)}(v_1, \dots ,v_N)$ مشترکاً گوسی
- اگر شرط قوی اخیر برقرار باشد، این خواص را دارد:
- ۱) با مشخص بودن $\overline{v(t)}$ و $R_v(t_1,t_2)$ کل فرایند مشخ
- ۲) اگر فرایند WSS باشد، ارگادیک نیز هست.
- پس اگر یک بار نویز را بر روی اسیلوسکوپ ضبط کنیم ک



نویز گوسی

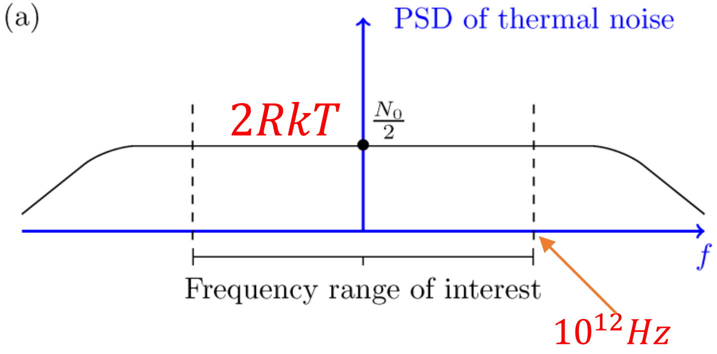
- ۳) اگر $v(t_1)$ و $v(t_2)$ نا همبسته باشند:
- $R_v(t_1, t_2) = v(t_1)v(t_2)$
- آنگاه $v(t_1)$ و $v(t_2)$ مستقل هم هستند.
- ۴) هر عمل خطی روی $v(t)$ به یک فرایند گوسی منجر می‌شود.



- در ادامه درس از این خواص که کار را ساده می‌کند استفاده خواهیم کرد.

نویز در سیستم‌های مخابراتی

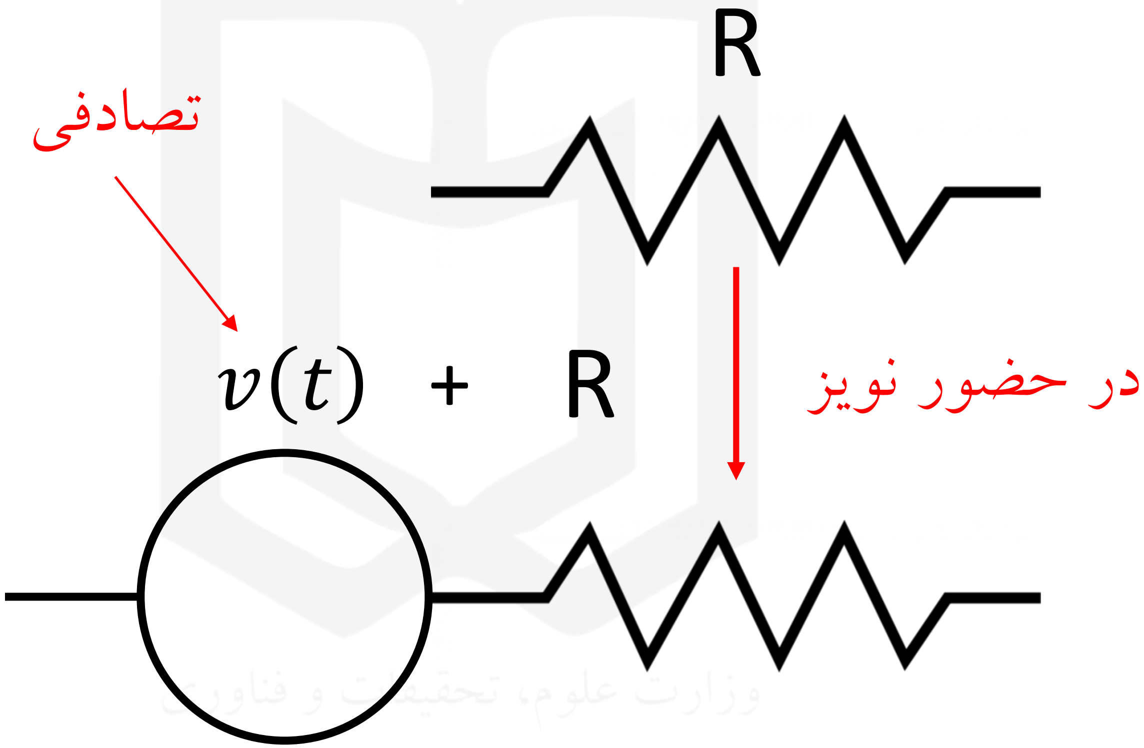
- منابع نویز بسیار متنوع هستند. (منظور منابع غیر مخابراتی است)
  - نویز موتورهای الکتریکی مثل موتور آسانسور
- در این درس روی نویز حرارتی یا thermal noise است. ناشی از حرکت تصادفی الکترونها در المانهای الکتریکی.
- رایجترین این نویزها، نویز مقاومت R در درجه حرارت T کلوین است. این نویز توزیع گوسی، میانگین صفر، واریانس σ_v^2 از این رابطه بدست می‌آید:
- $\sigma_v^2 = \overline{v^2} = \dfrac{2(\pi kT)^2}{3h} R, k = boltzmann\ constant, h = planck\ constant$



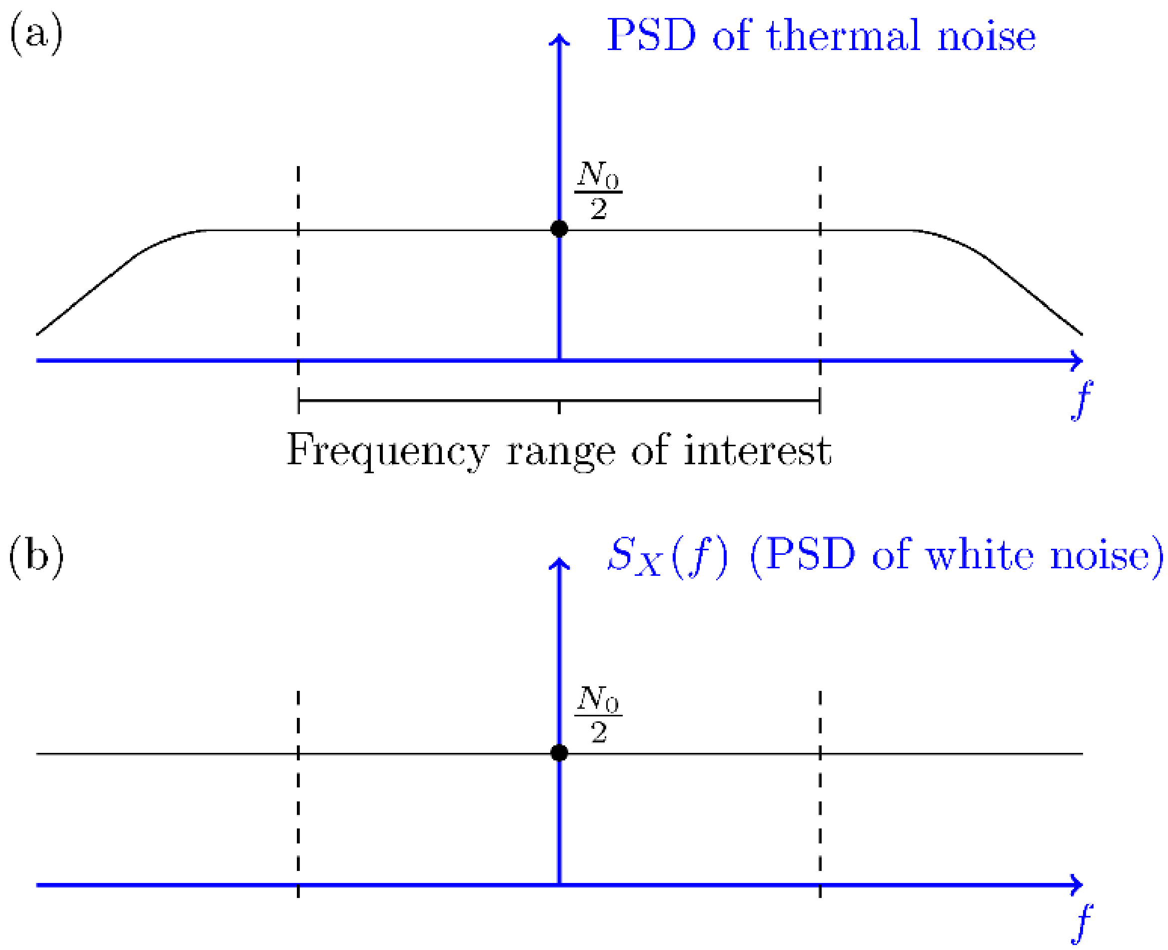
- همچنین تابع چگالی طیف $G_v(f) = \dfrac{2Rh|f|}{e^{h|f|/kT}-1} \approx 2RkT, f < 10^{12}$
- سطح زیر این منحنی $\overline{v^2}$ است که همان σ_v^2 است.

Https://www.drisnet.com

نویز در سیستم‌های مخابراتی



نویز در سیستم‌های مخابراتی



- نویز سفید White noise
- نویز غیر واقعی است ولی یک مدل مناسب برای نویز حرارتی است. فقط باید دقت شود که برای بازه فرکانسی محدودی در نظر گرفته شود.