بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه جیرفت

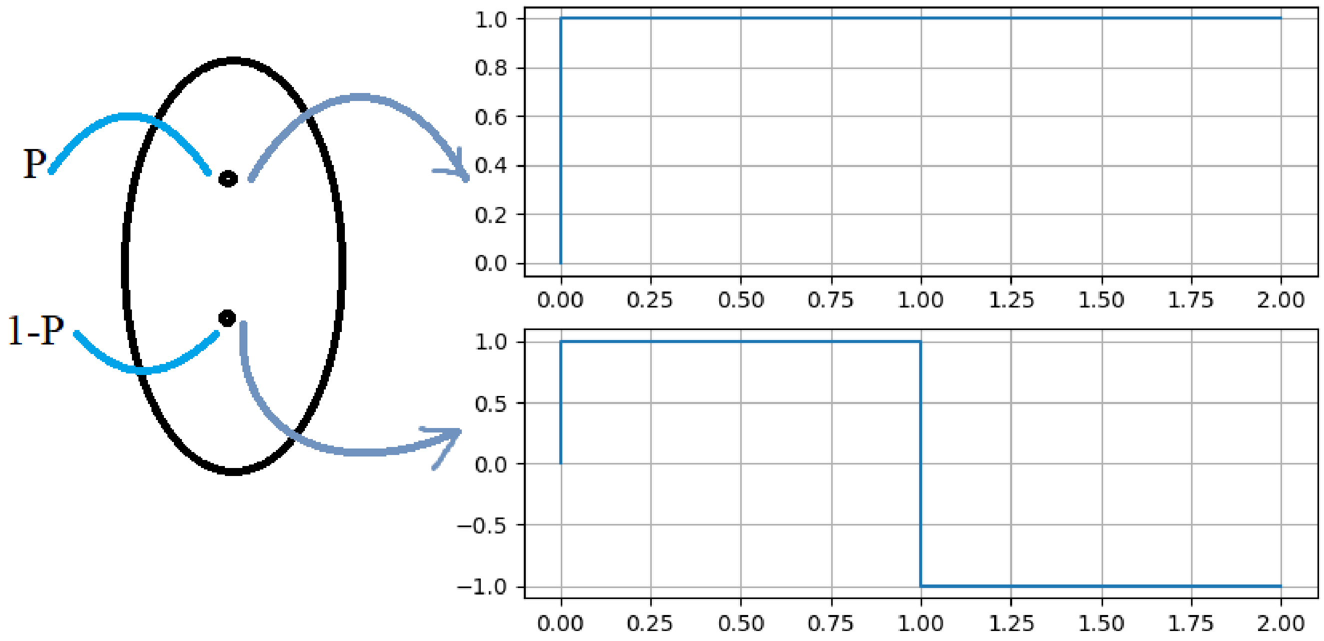
سیستمهای مخابراتی

جلسه ۹

مدرس : دکتر محمد هاشمی نژاد

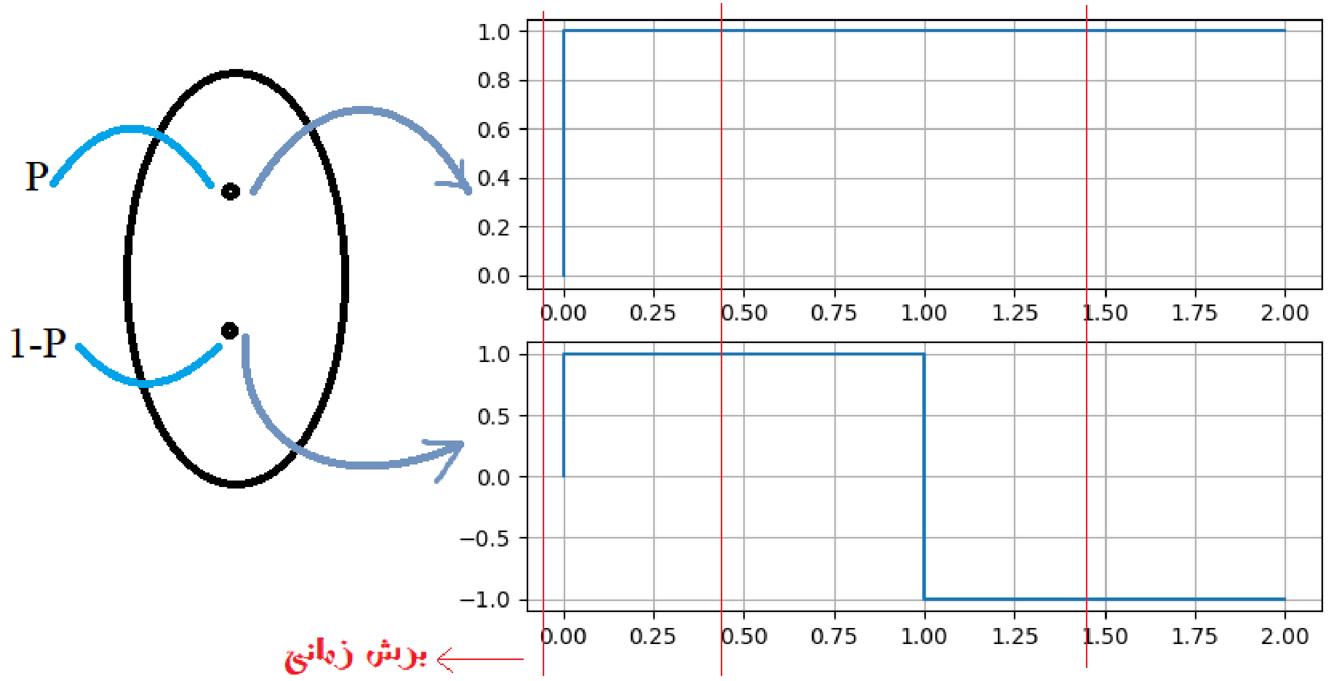
تابع خودهمبستگی سیگنال های تصادفی و فرآیندهای ایستا

- $\overline{v(t)} = E[v(t)] = \int vP_v(v)dv$
- مثال: برای فرایند تصادفی زیر $\overline{v(t)}$ (متوسط) و $P_v(v)$ (تابع چگالی احتمال) را بدست آورید.



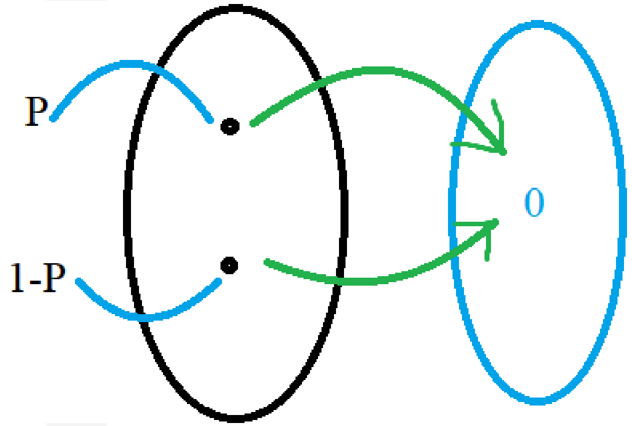
تابع خودهمبستگی سیگنال های تصادفی و فرآیندهای ایستا

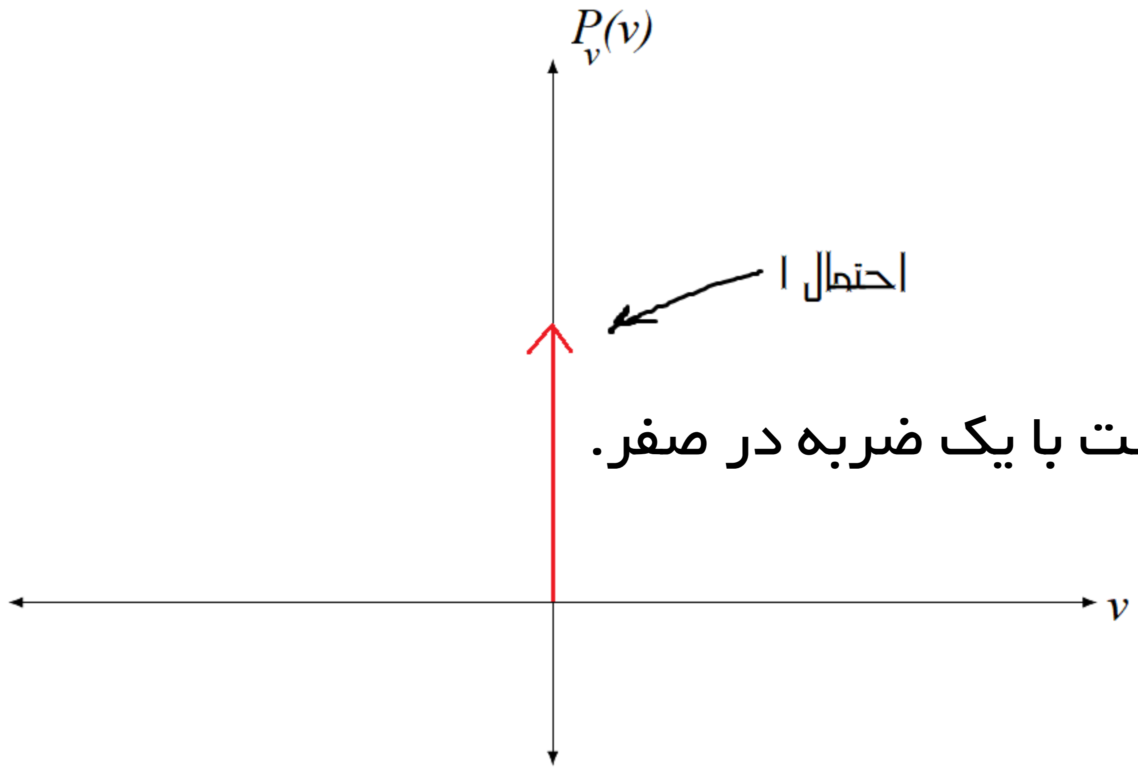
- برای بدست آوردن این مقادیر برش زمانی می‌زنیم که متغیر تصادفی بدست می‌آید، که می‌توان متوسط و تابع چگالی احتمال آن را بدست آورد. در اینجا سه حالت برای متغیر تصادفی داریم. در $t < 0$ هر دو متغیر تصادفی در همه برش‌های زمانی مقدار صفر را دارند. در $0 < t < 1$ هر دو ۱ و در $1 < t < 2$ اولی ۱ و دومی ۰ است.



تابع خودهمبستگی سیگنال های تصادفی و فرآیندهای ایستا

- در $t < 0$:





- در این حالت تابع چگالی احتمال $(P_v(v))$ برابر است با یک ضربه در صفر.

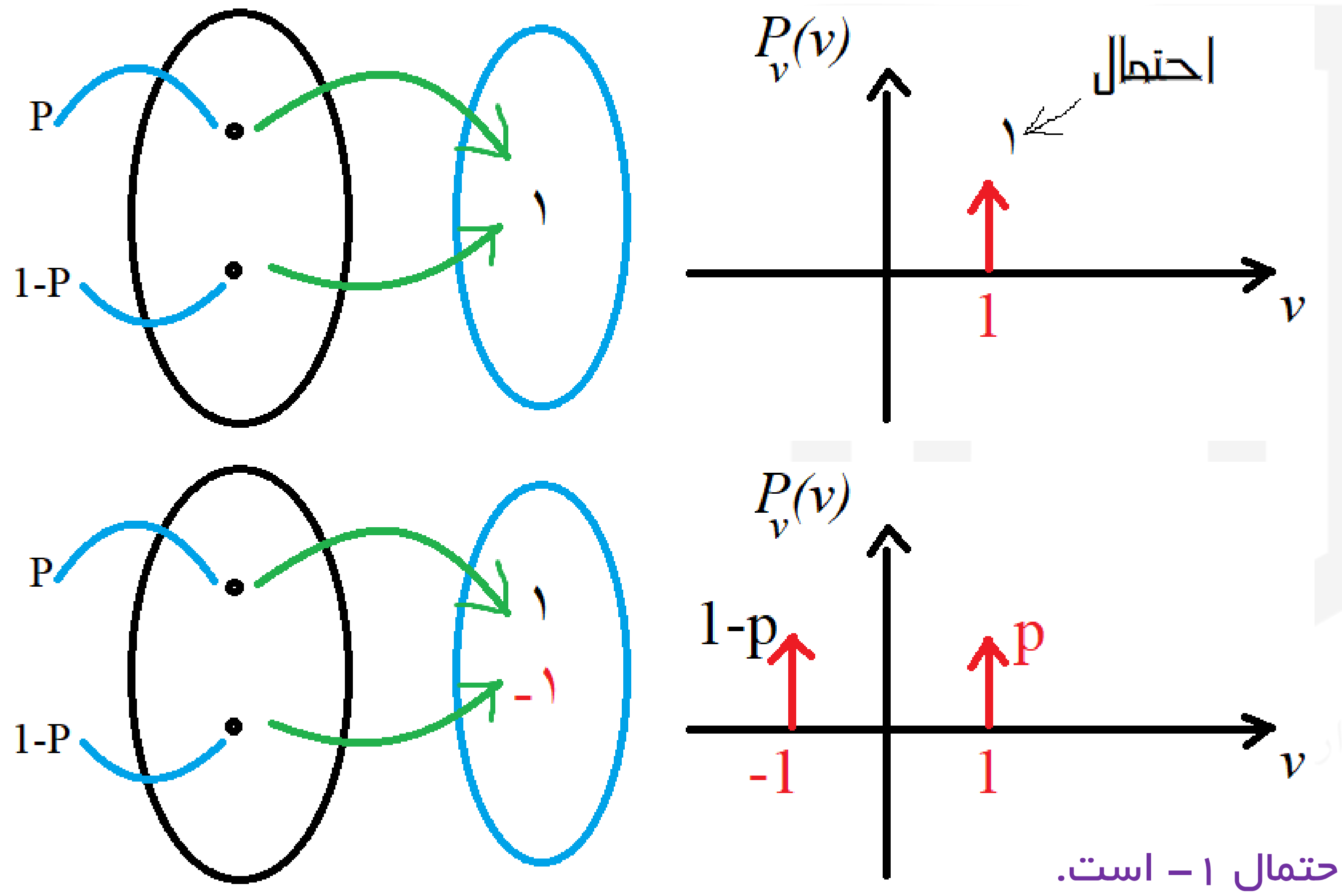
$$\overline{v(t)} = 0 \times 1 = 0$$

تابع خودهمبستگی سیگنال های تصادفی و فرآیندهای ایستا

- در $0 < t < 1$:

$$\overline{v(t)} = 1 \times 1 = 1$$

- در $۱ < t < ۲$:

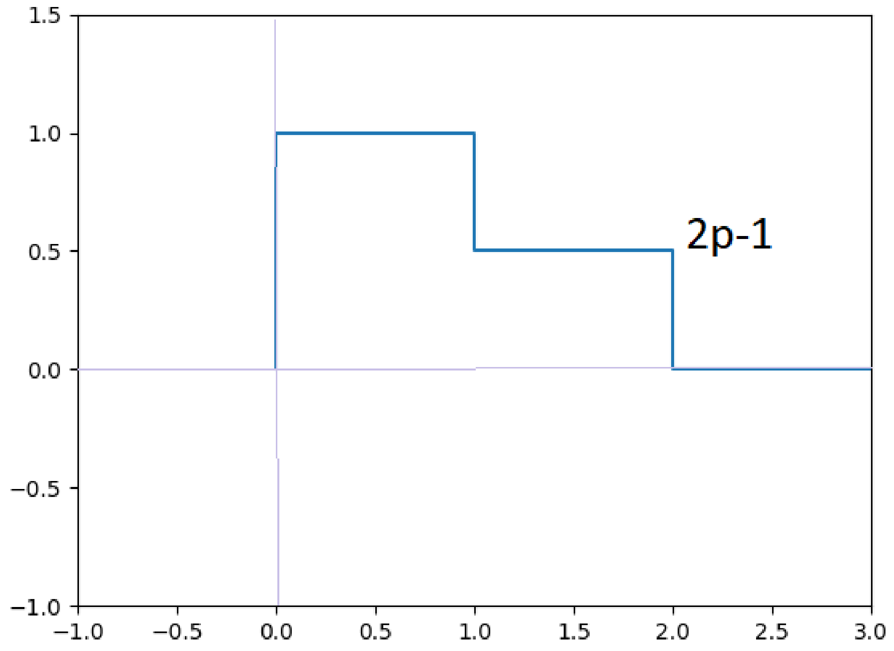


$$\overline{v(t)} = p \times 1 + (1-p) \times (-1)$$

با یک احتمال 1 و با یک احتمال ۱− است.

تابع خودهمبستگی سیگنال های تصادفی و فرآیندهای ایستا

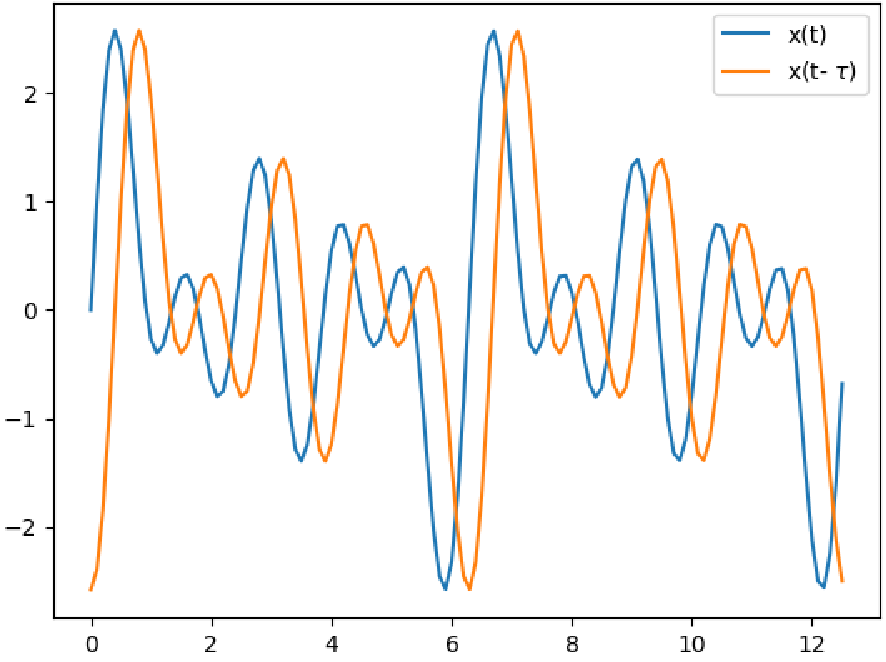
- در کل مقدار متوسط آماری به این صورت می‌شود:



وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه جیرفت

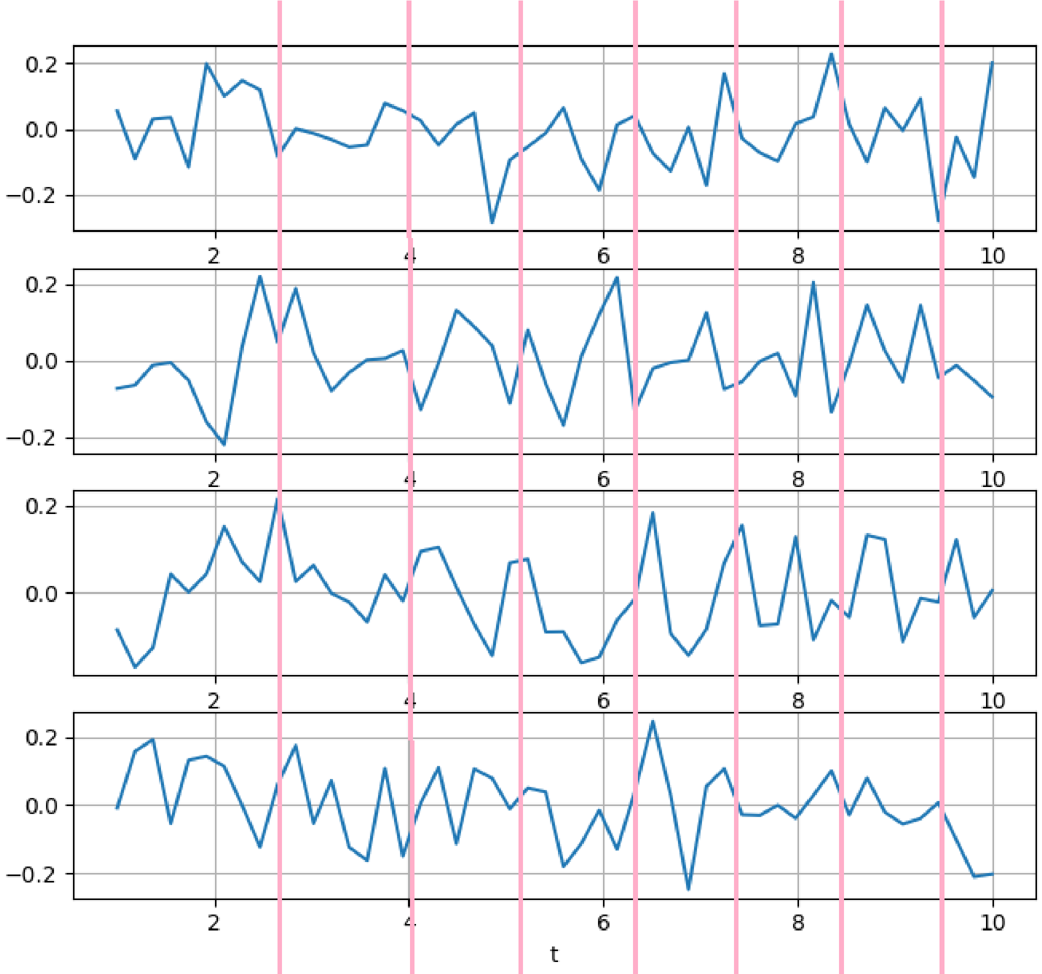
ارتباط زمانی

- **ارتباط زمانی بین نقاط مختلف فرایند:(نقطه کلیدی)**
- این مهم است چون تابع چگالی طیف $(G_x(f))$ برای ما مهم است (توزیع توان سیگنال را در فرکانس‌های مختلف می‌دهد) و رفتار فرکانسی سیگنال تصادفی را می‌خواهیم بدانیم.
- برای بدست آوردن این ارتباط زمانی (به صورت کمّی) از تابع خود همبستگی برای یک فرایند تصادفی استفاده می‌کنیم.



- در سیگنالهای معین با شیفت و ضرب و انتگرالگیری تابع خود همبستگی محاسبه می‌شود.
- این مشابه این است که مقدار سیگنال در زمان t در مقدار همین سیگنال در زمان $t+\tau$ ضرب کنیم. و نتایج را با هم جمع کنیم.

ارتباط زمانی

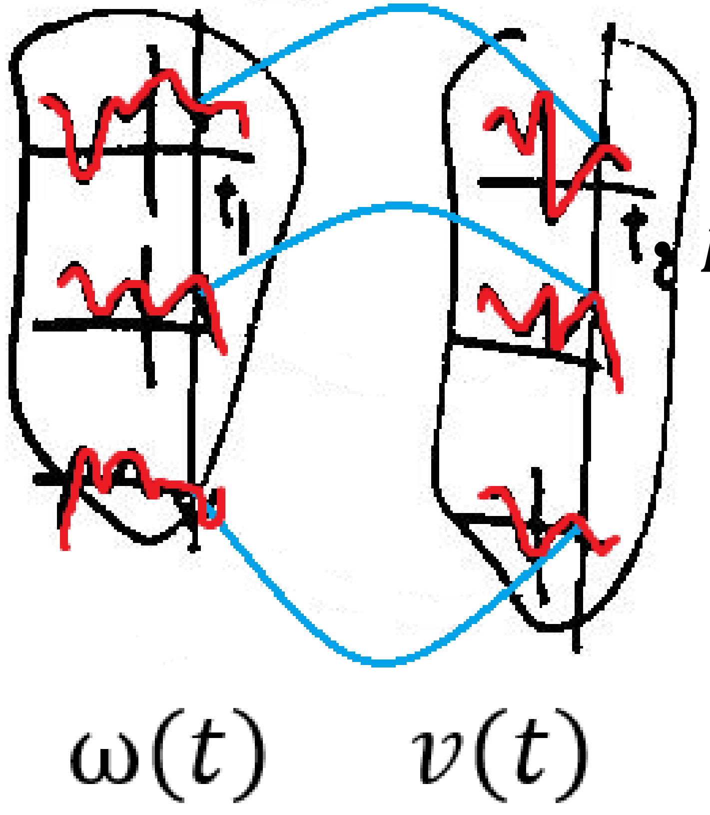


- در سیگنالهای تصادفی سیگنال را بر حسب زمان نداریم و مجبوریم از مفهوم برش‌های زمانی استفاده کنیم.
- برای محاسبه خود همبستگی می‌توان مقدار تابع را در همه برشهای زمانی روی سیگنال که با هم فاصله زمانی τ را دارند در هم ضرب و همه نتایج را با هم جمع می‌کنیم تا مقدار خود همبستگی در τ بدست آید (به نوعی **متوسط گیری** انجام می‌شود).
- در **فرایندهای تصادفی** می‌توان به جای این هر نقطه را در نقطه متناظرش ضرب کرد و یک برش زمانی **متوسط آماری** گرفت.
- $R_v(t_1,t_2) \triangleq E[v(t_1)v(t_2)] = \iint v_1 v_2 P_{v_1,v_2}(v_1,v_2)dv_1dv_2$

حالت معین – حالت تصادفی

- تفاوت با حالت معین:
- ۱– در مورد توابع معین متوسط گیری در زمان صورت می‌گیرد در اینجا متوسط گیری روی توابع نمونه و در یک زمان مشخص است.
- ۲– $R_v(t_1,t_2)$ در حالت کلی به دو مقدار t_1,t_2 وابسته است نه به متغیر $\tau = t_1 - t_2$ که در حالت معین داشتیم. یعنی اگر این فاصله ثابت باشد در یک جای (برش‌های زمانی) توابع فرایند متوسط گیری کنیم ممکن است با جای دیگر فرق کند. (شکل مثال قبلی)
- شباهتها با حالت معین:
- ارتباط تابع خود همبستگی با مفهوم توان متوسط در حالت معین $R_v(0) = \langle v^2(t) \rangle$ را داشتیم در اینجا اگر $t_1 = t_2$ باشد خودهمبستگی منجر به متوسط آماری می‌شود.
- ارتباط با مفهوم فرکانسی. (بعدا می‌رسیم)
- در حالت خاص که $v_1(t)$ و $v_2(t)$ از هم مستقل باشند: $R_v(t_1,t_2) = \overline{\mathrm{v}(\mathrm{t}_2)}\,.\overline{\mathrm{v}(\mathrm{t}_1)}$
- تعمیم به دو سیگنال تصادفی: برای دو فرایند تصادفی $v(t)$ و $\omega(t)$:
- $R_{v\omega}(t_1,t_2) \triangleq E[v(t_1)\omega(t_2)]$

حالت معین – حالت تصادفی

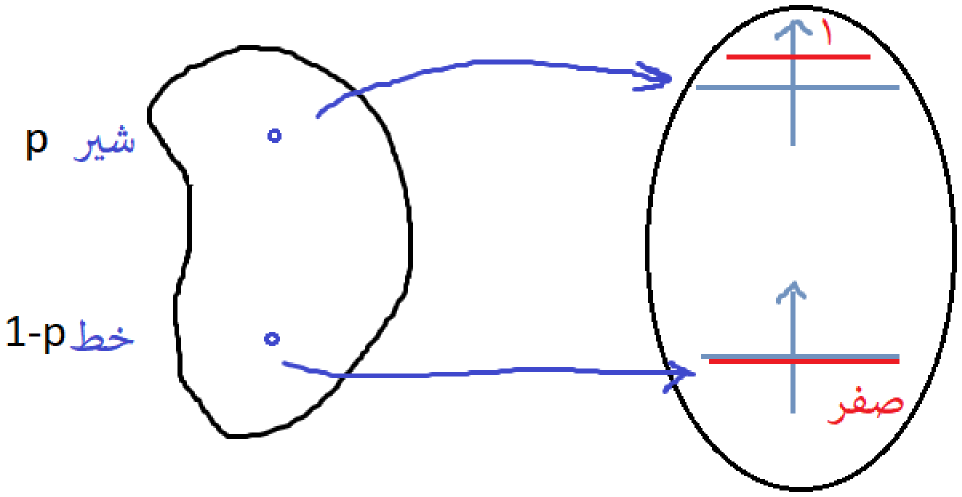


- یک برش زمانی در فرایند اول، یک برش زمانی در فرایند دوم ایجاد می‌کنیم مقادیر متناظر را در هم ضرب می‌کنیم. سپس روی توابع نمونه متوسط می‌گیریم.
- برای دو فرایند ناهمبسته (uncorrelated) :

$$R_{v\omega}(t_1, t_2) = \overline{\mathbf{v}(\mathbf{t}_2)} \,.\, \overline{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}_1)}$$

- دو فرایند مستقل، نا همبسته هستند ولی عکس آن لزوماً صحیح نیست

مثال



- مثال: برای فرایند زیر $R_v(t_1,t_2)$ را محاسبه کنید.
- روش اول محاسبه:
- $R_v(t_1,t_2) \triangleq E[v(t_1)v(t_2)] = \iint v_1 v_2 P_{v_1,v_2}(v_1,v_2)dv_1 dv_2$
- روش دوم: چون یک حالت ساده است، می‌توانیم تک تک نقاط را در هم ضرب کنیم و متوسط بگیریم:
- $P \times 1 \times 1 + (1-P) \times 0 \times 0 = P$
- دو برش زمانی زدیم که مقادیر روی برش در بالایی یک در P ضرب شدند و مقادیر پایینی که هر دو صفر هستند در $(1-p)$ ضرب شده‌اند.
-

مثال تابع سینوسی

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه جیرفت

- برای $v(t) = Acos(\omega t + \phi)$ اگر مقادیر A، ω، ϕ را تصادفی بگیریم به فرایندهای تصادفی مختلفی می‌رسیم.
- اول فرض می‌کنیم A و ω ثابت و ϕ متغیر بین $[0, 2\pi)$ باشد $\overline{v(t)}$ و $R_v(t_1,t_2)$ را بدست آورید.
- $\overline{v(t)} = E[Acos(\omega t + \phi)]$
- روش اول برای محاسبه $E[Acos(\omega t + \phi)]$: محاسبه تابع چگالی احتمال و انتگرال گیری:
- $P_v(v) \to \int vP_v(v)$
- محاسبه تابع چگالی احتمال $v = Acos(\omega t + \phi)$ از خاصیت تابع استفاده می‌کنیم (روش سخت)
- $y = f(x) \to$ having $x: P_x(x) \xrightarrow{we\ can\ have} y: P_y(y)$ here we have ϕ want v
- روش دوم: محاسبه مستقیم: $P_\phi(\phi)$ را داریم که یکنواخت در بازه $[0, 2\pi)$ است.
- $\overline{v(t)} = \int Acos(\omega t + \phi)P_\phi(\phi)d\phi$
- $P_\phi(\phi): uniform\ [0, 2\pi) \Rightarrow \overline{v(t)} = A\int_0^{2\pi} cos(\omega t + \phi) \times \frac{1}{2\pi} d\phi = 0$

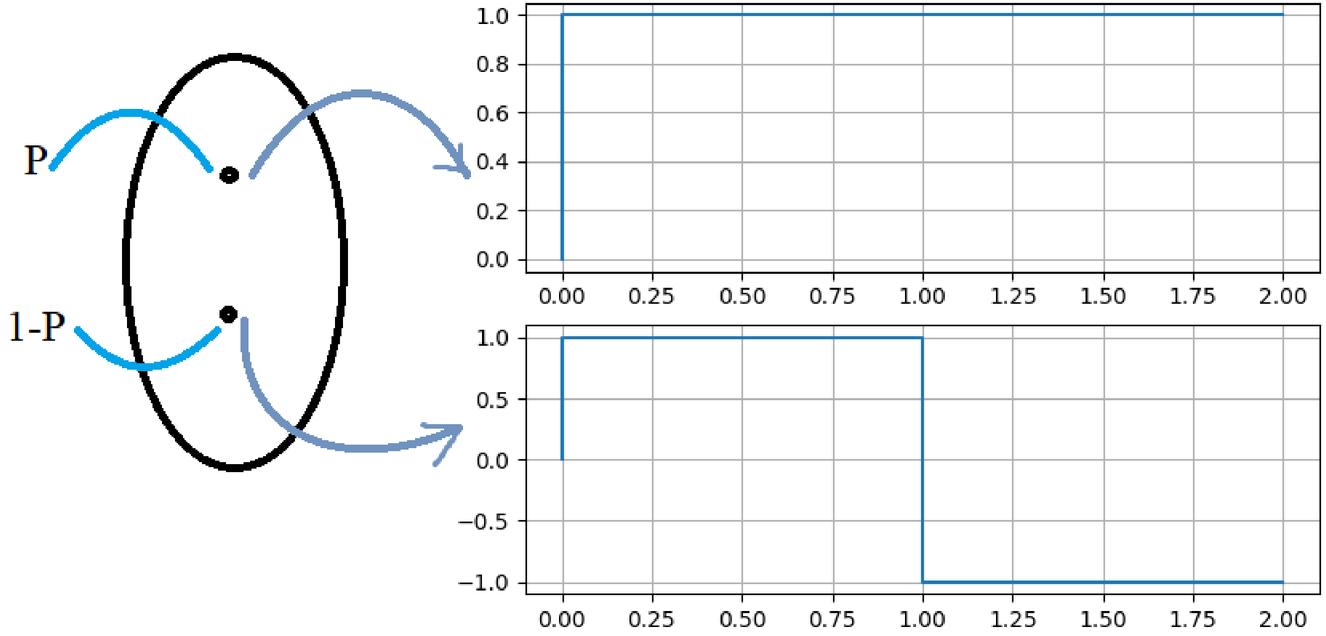
مثال تابع سینوسی

- برای $v(t) = Acos(\omega t + \phi)$ محاسبه $R_v(t_1,t_2)$: (در این مثال خاص متوسط آماری و متوسط زمانی برابر است.)
- برای $R_v(t_1,t_2)$ هم دو روش داریم:
- روش اول: $P_{v_1v_2(v_1,v_2)}$ را بدست آوریم و انتگرال بگیریم.(تمرین)
- روش دوم:

- $R_v(t_1, t_2) \triangleq E[v(t_1)v(t_2)] = E[Acos(\omega t_1 + \phi)Acos(\omega t_2 + \phi)] = \int A^2 cos(\omega t_1$

فرایند ایستا (stationary)

- در مثال اخیر مهم نیست که برشهای زمانی که در فاصله یکسان هستند کجا زده شوند. اگر فاصله برشها یکسان باشد، نتیجه یکسان است. (رفتار فرایند در زمان تغییر نمی‌کند)
- ولی در مثالی که قبلا گفته شد(شکل زیر) به این صورت نیست:



فرایند ایستا (stationary)

- مشخصات آماری آن با زمان تغییر نمی‌کند. مقدار متوسط آماری ثابت باشد و میزان همبستگی تابعی از زمان نیست. $\overline{v(t)} = \bar{v}$
- تابع همبستگی فقط به اختلاف t_1 و t_2 بستگی دارد. $R_v(t_1,t_2) = R_v(t_1 - t_2) = R_v(\tau)$
- فرایندی که این دو خاصیت را داشته باشد Wide Sense Stationary (WSS) نام دارد. $R_v(0) = \overline{v^2}$ که یک عدد ثابت است.
- مثال کسینوسی تک فرکانس با فاز تصادفی WSS است. هر دو خاصیت را دارد. (ادامه کار)
- در اینجا فقط با توابع نمونه و متوسطهای آماری سر و کار داشته ایم. برای یک فرایند تصادفی واقعی مثل نویز اسیلوسکوپ $\overline{v(t)}$ و $R_v(t_1,t_2)$ را محاسبه کنید: باید سالها پشت اسیلوسکوپ بنشینیم و تابع نمونه تولید می‌کنیم! به این شکل امکانپذیر نیست.
- برای رفع مشکل فرایندهای ارگادیک را تعریف می‌کنیم. این فرایندها متوسطهای آماری و زمانی برابری دارند. به این صورت یک تابع نمونه کافی است $\overline{v(t)} = \langle v(t) \rangle$ و $R_v(\tau) = \langle v(t)v(t-\tau) \rangle$ مثل سینوسی تک فرکانس.