بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه جیرفت

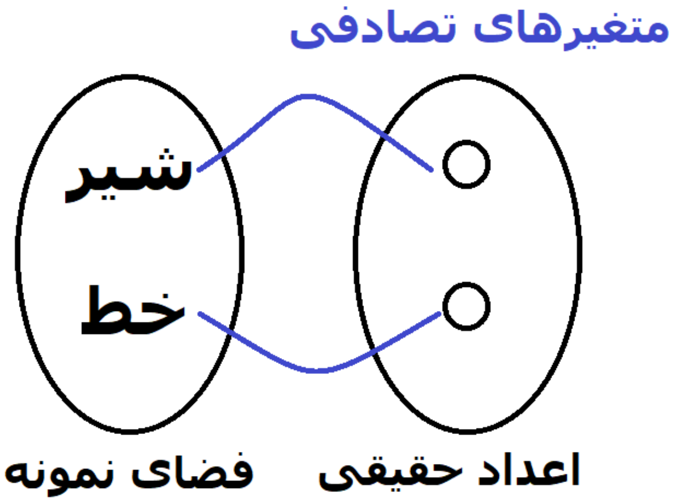
سیستمهای مخابراتی

جلسه ۸

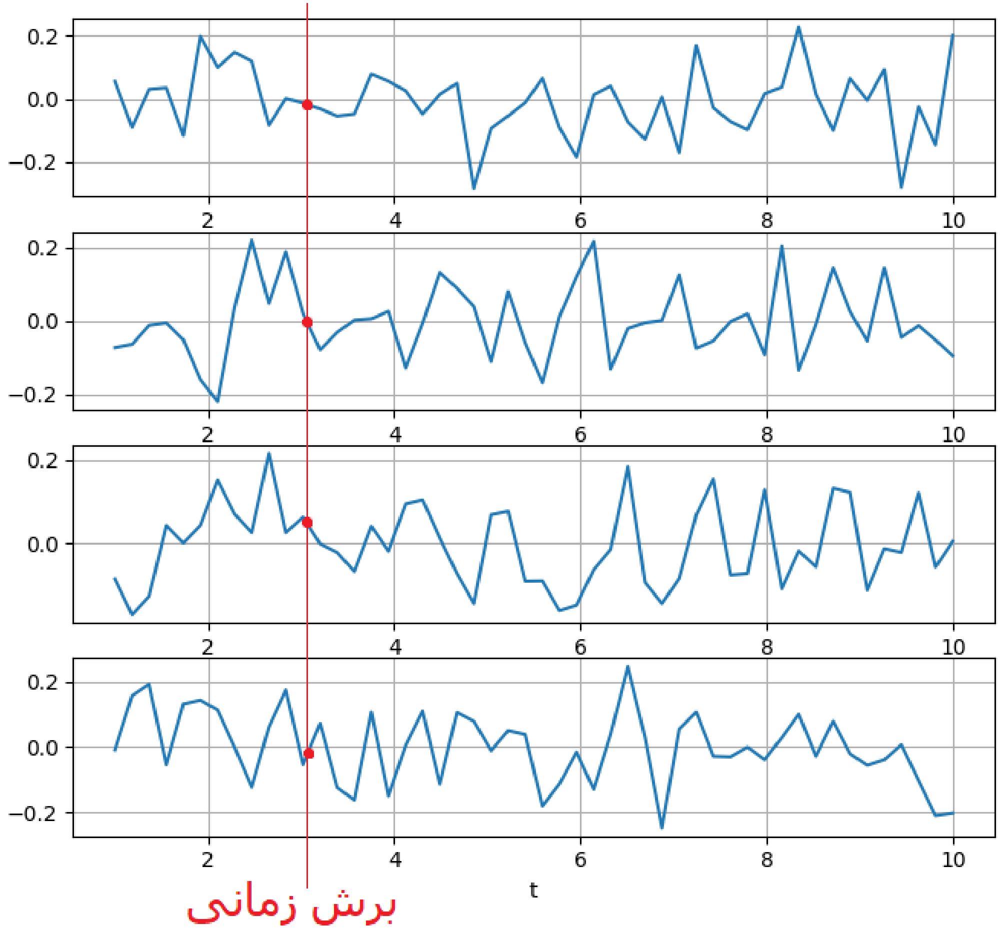
مدرس: دکتر محمد هاشمی نژاد

متغیرهای تصادفی

- متغیر تصادفی random variable
- مثال: در آزمایش شیر یا خط آمدن سکه متغیر تصادفی چیست؟
- تابعی معین (deterministic) از فضایی به فضای دیگر
- این اعداد حقیقی می‌توانند همان متغیرهای تصادفی باشند.
- چگونه نمونه ها به یک اعداد حقیقی نسبت داده می‌شوند؟!
- این تابع معین است و تصادفی نیست مقدار تابع $= X(s)$
- $s \in S$ نقاط فضای نمونه با حروف کوچک
- برای رسیدن به سیگنال تصادفی از مفهوم متغیر تصادفی باید مفهوم زمان را به آن اضافه کنیم

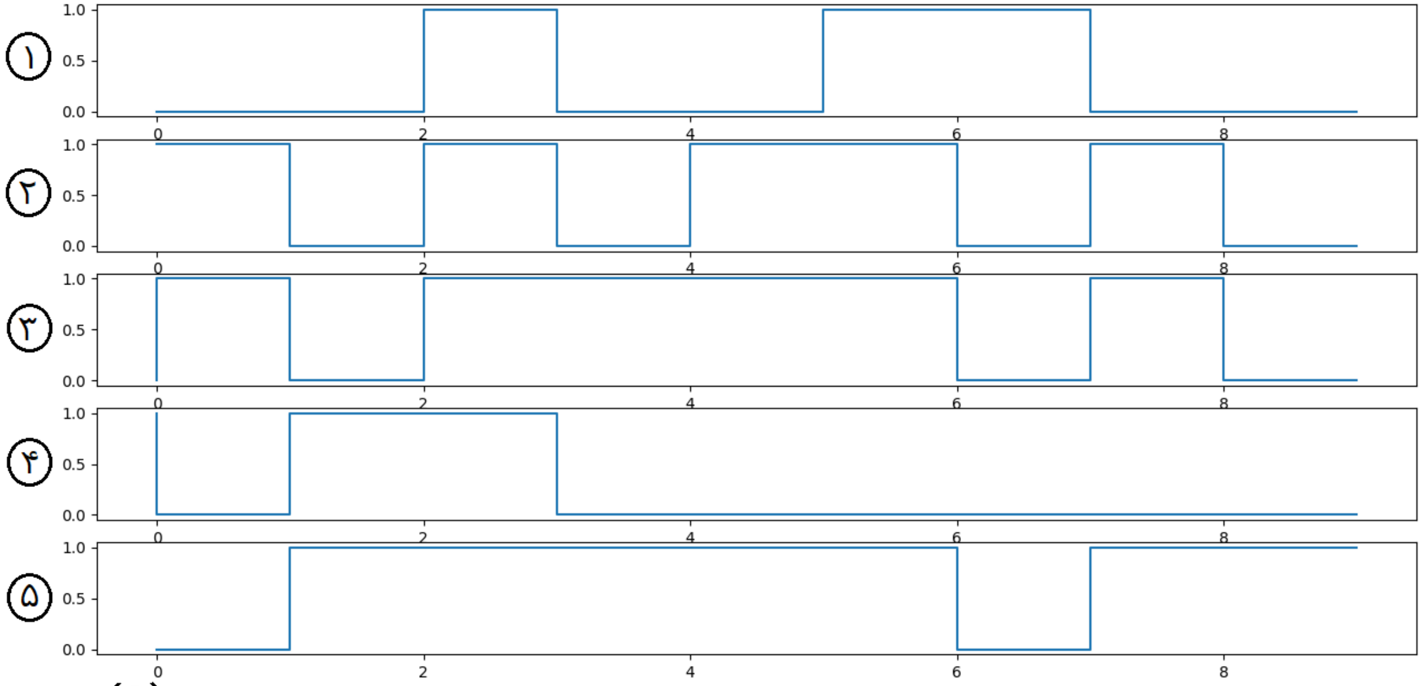


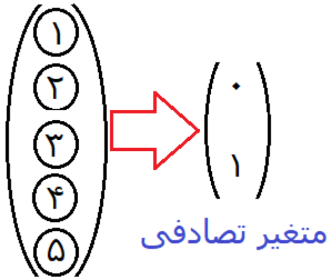
افزودن مفهوم زمان به مفهوم متغیرهای تصادفی



- سیگنال را برش زمانی می‌زنیم.
- با فرض اینکه سیگنالها شامل اعداد حقیقی باشند، می‌توانیم مقادیر در یک برش زمانی را همان مقادیر متغیر تصادفی درنظر بگیریم.
- در اینجا فضای نمونه مجموعه روشهایی هستند که این سیگنالها تولید شده‌اند.

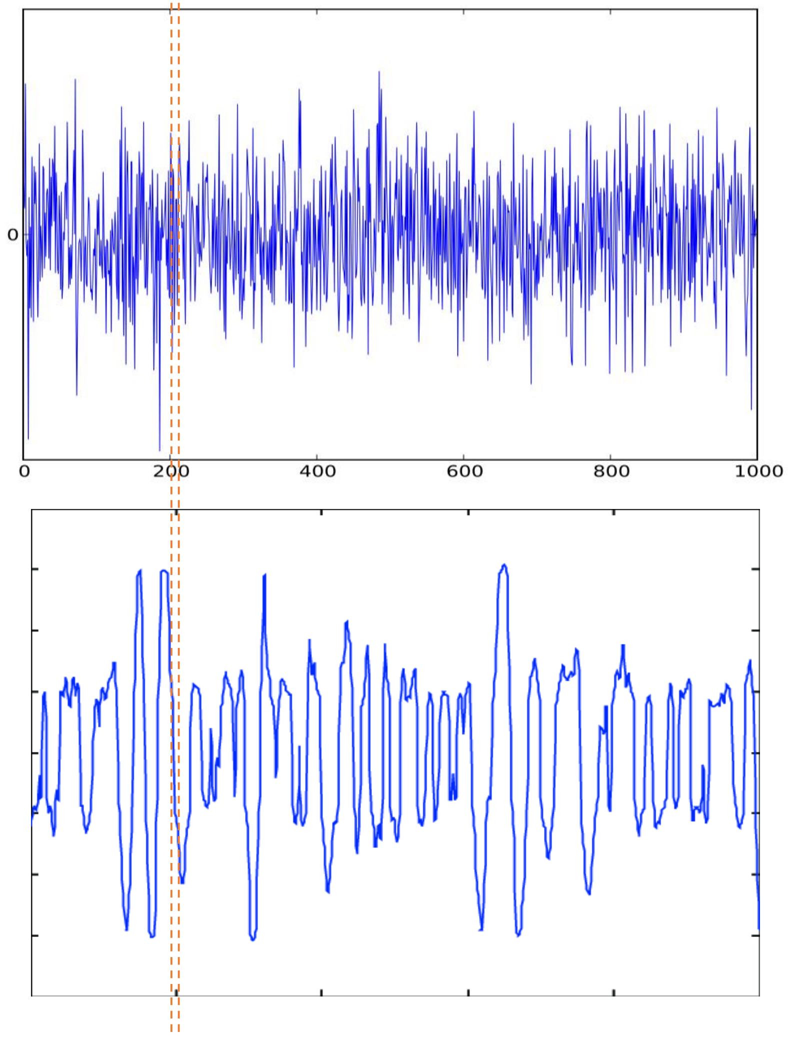
افزودن مفهوم زمان به مفهوم متغیرهای تصادفی





- در شکل روبرو سیگنالهای باینری تصادفی نشان داده شده است که متغیر تصادفی آنها یا صفر است و یا یک.
- **اشکال برش زمانی:** اطلاعاتی در سیگنال است که در برش زمانی آن وجود ندارد.
- این اطلاعات ارتباط زمانی این برشها با هم است.
- این اطلاعات فرکانس سیگنال است

افزودن مفهوم زمان به مفهوم متغیرهای تصادفی



- فرکانس مهم است چون چگالی طیف توان در یک سیستم مخابراتی یکی از مهمترین موارد است که در هزینه سیستم تأثیر گذار است.

- اگر دو تا برش زمانی بزنیم و همبستگی زمانی بین اینها را مشخص کنیم تا حدودی به محتوای فرکانسی پی می‌بریم. چون در سیگنالهای تصادفی نمی‌توانیم تبدیل فوریه بگیریم با استفاده از این همبستگی زمانی مفهوم فرکانس از آن قابل استخراج است.

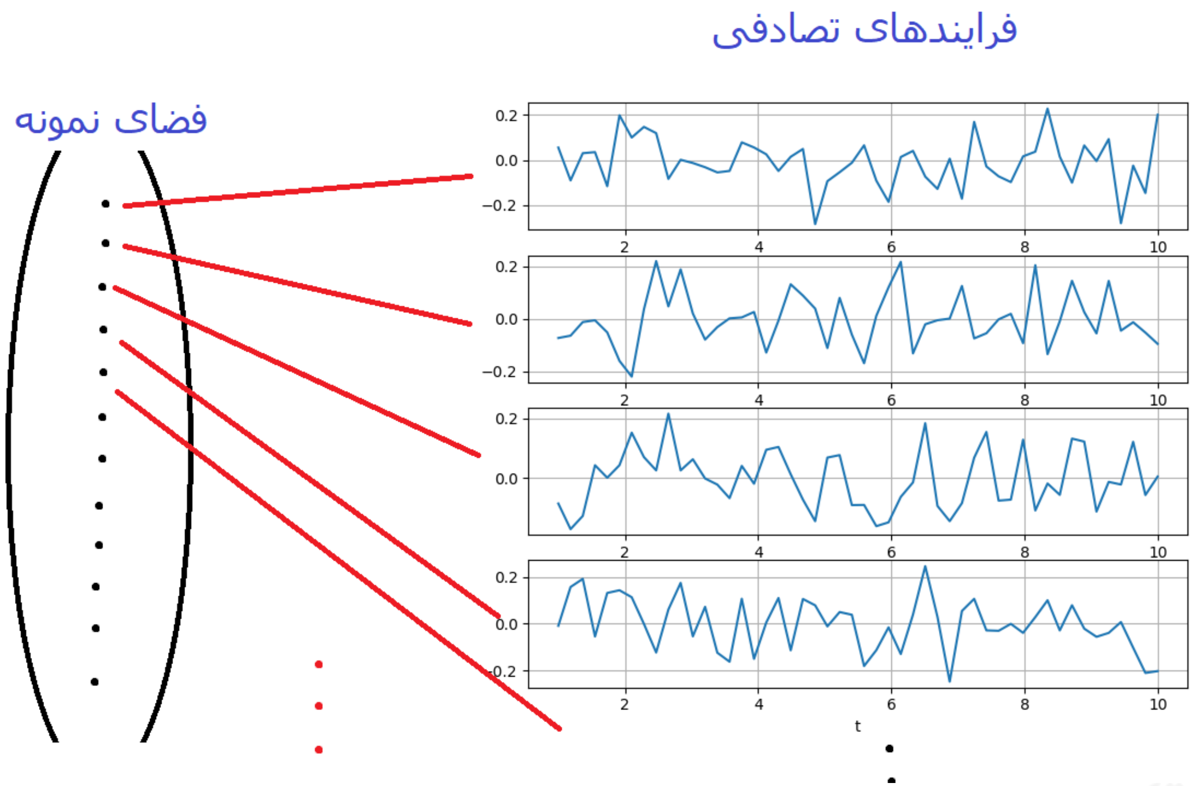
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه جیرفت

فرایند تصادفی

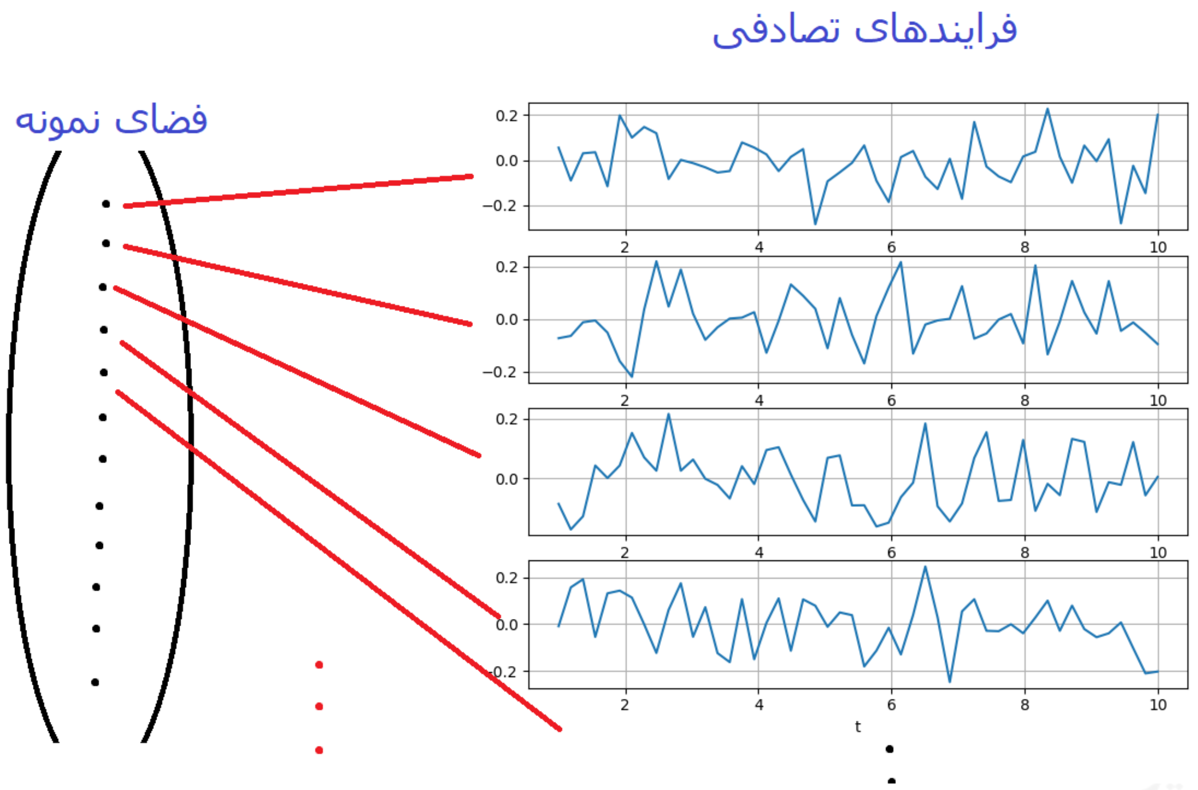
- پس به دلیل دربر نداشتن فرکانس، تعریف برش زمانی یک تعریف کافی برای ارتباط دادن فرایند تصادفی به سیگنالهای تصادفی نیست. پس به این صورت تعریف می‌کنیم:

- **فضای نمونه:** حالت‌های مختلف ممکن برای سیگنال

- **فرایند تصادفی:** خود سیگنال زمانی یا به عبارتی تابعی از فضای نمونه که به یک تابع حقیقی از زمان تصویر می‌شود

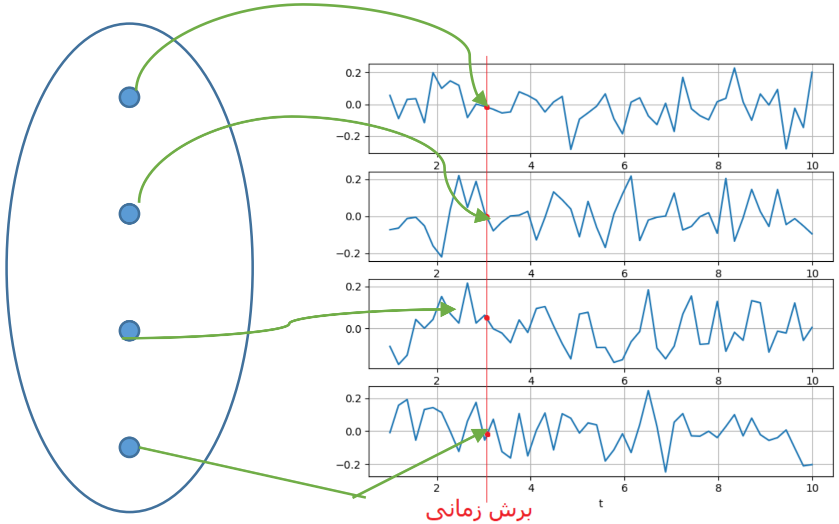


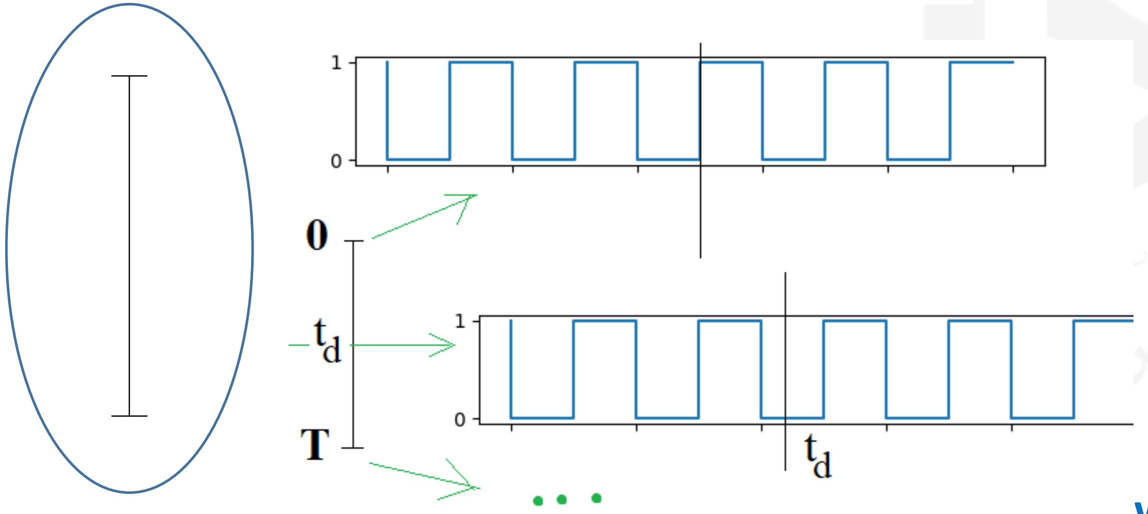
فرایندهای تصادفی



- مجموعه کل این توابع را Ensemble می‌نامیم و با $v(t,s)$ نشان می‌دهیم. S نشان می‌دهد که مربوط به کدام یک از فضای نمونه است.
- هر کدام از اعضای این فضا را تابع نمونه یا sample function می‌نامیم.
- **نکته:** با مشخص شدن مقدار s از فضای نمونه، تابع نمونه متناظر با آن مشخص شده و یک تابع کاملا معین و deterministic است. آنچه آن را تصادفی می‌کند انتخاب تصادفی نقطه‌ای از فضای نمونه است.

فرایند تصادفی

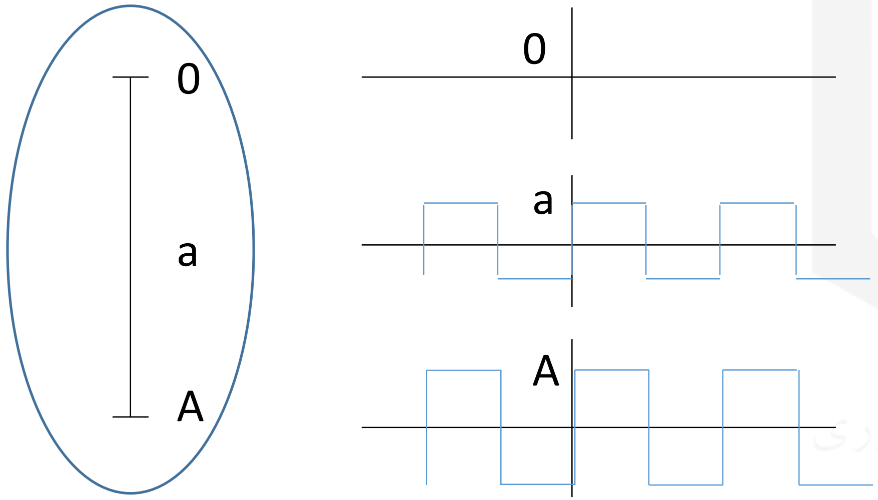




- با مشخص کردن زمان $t = t_1$ یک برش زمانی از فرایند داریم که به یک متغیر تصادفی منجر می‌شود. هر مقدار روی برش زمانی مربوط به یک نقطه در فضای نمونه می‌شود. که با $v(t_1,s)$ نشان داده می‌شود. از این به بعد فرایند تصادفی را به طور خلاصه با $v(\mathrm{t})$نشان می‌دهیم.
- مثال: یک سیگنال باینری با عرض پالس t تأخیر t_d (نسبت به زمان ۰) که t_d توزیع یکنواخت بین [0,T] دارد. فرایند تصادفی آن به چه صورت است؟

فرایند تصادفی

- مثال: سیگنال باینری که دامنه پالس‌های به صورت یکنواخت بین ۰ و A تغییر می‌کند.



فرایند تصادفی

- برای مشخص کردن یک فرایند تصادفی یکی از این کارها را می‌توان کرد:
- ۱ – مشخص کردن همه توابع نمونه
- ۲– برشهای زمانی (مشخص نشدن فرکانس) ––> متغیرهای تصادفی ––> تابع چگالی احتمال مشترک ارتباط این متغیرهای تصادفی را مشخص می‌کنند.
- مثال t_1 و t_2 برای این $x = v(t_1)$ و $y = v(t_2)$ متغیرهای تصادفی هستند. ارتباط بین اینها از روی تابع چگالی احتمال مشترک $P_{XY}(x,y)$ بدست می‌آید که ارتباط زمانی و در نتیجه فرکانس را می‌دهد.
- همبستگی زمانی دو متغیر تصادفی فرکانس را می‌دهد. این اطلاعات را تابع چگالی احتمال مشترک می‌دهد.
- برای اینکه اطلاعات کاملی از فرایند داشته باشیم باید تمامی این چگالی احتمال مشترک‌ها را داشته باشیم.

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه جیرفت

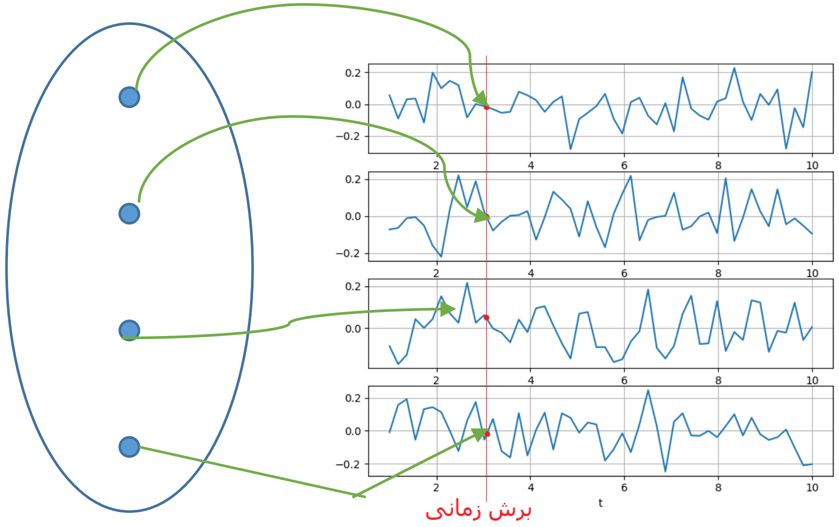
فرایند تصادفی

- **در حالت کلی برای مشخص شدن فرایند:**
- توابع چگالی احتمال مشترک در لحظات $t_1, t_2, \ldots, t_N$ برای تمامی مقادیر t_i و تمامی مقادیر N لازم است که مشخص باشد.
- در عمل با فرایندهایی کار می‌کنیم که تعداد محدود (مرتبه ۲) از برشهای زمانی کفایت کند. که آن را با $P_{v(t_1)v(t_2)}(v_1, v_2)$ نمایش می‌دهیم.
- بسیاری از سیگنال‌ها اینچنین هستند.

متوسط آماری و متوسط زمانی

- متوسط آماری:
  - فرایند تصادفی داریم.
  - مجموعه‌ای از توابع نمونه داریم.
  - برش زمانی می‌زنیم و از مقادیر برش زمانی متوسط می‌گیریم
- متوسط زمانی
  - یک سری توابع نمونه داریم که متوسط هر کدام را در زمان ممتوسط می‌گیریم.
- منظور از متوسط در یک فرایند متوسط آماری است.
- در حالت کلی متوسط آماری می‌تواند تابعی از زمان باشد.
- یک قدم ساده‌تر کار با متوسطهای آماری است. ساده‌تری متوسط آماری مقدار متوسط یا میانگین است.

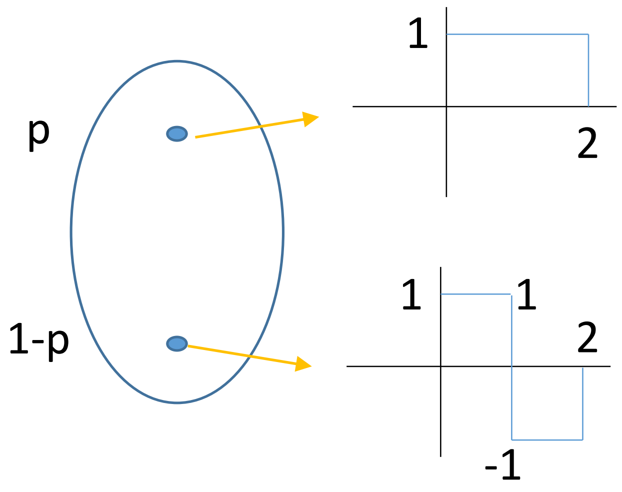
فرایند تصادفی



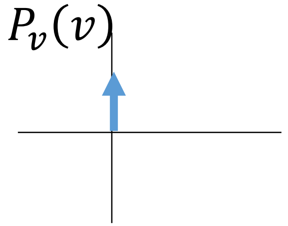
- پس یک فضای نمونه داریم که یک سری فرایندهای مرتبط با آن است. یک برش زمانی می‌زنیم و به یک سری متغیرهای تصادفی می‌رسیم. این متغیرهای تصادفی یک متوسط آماری $\overline{v(t)}$ در لحظه t دارند که به این صورت تعریف می‌شود:
- $\overline{v(t)} = E[v(t)] = \int vP_v(v)dv$
- خود تابع چگالی احتمال $P_v(v)$ تابعی از زمان است پس $P_v(v,t)$ است.

فرایند تصادفی (مثال)

- فرض کنید یک متغیر تصادفی به این صورت تعریف می‌شود.
  - $P_v(v)$ و $\overline{v(t)}$ را به دست آورید.

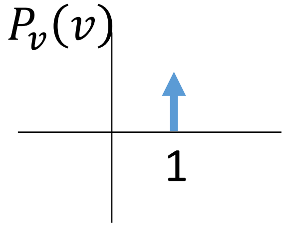


- $t > 2, t < 0 \Rightarrow p \to 0, 1 - p \to 0$



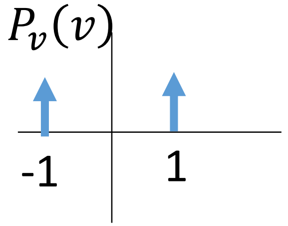
$\overline{v(t)} = 0$

- $0 < t < 1 \Rightarrow p \to 1, 1 - p \to 1$



$\overline{v(t)} = 1$

- $1 < t < 2 \Rightarrow p \to 1, 1 - p \to -1$



$\overline{v(t)} = p \times 1 + (1 - \mathrm{p}) \times (-1)$