وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

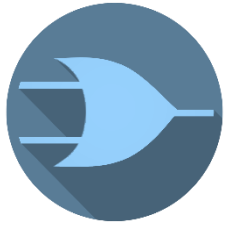
دانشگاه جیرفت

سیستمهای دیجیتال ۱

جلسه ۸

مدرس: دکتر محمد هاشمی‌نژاد

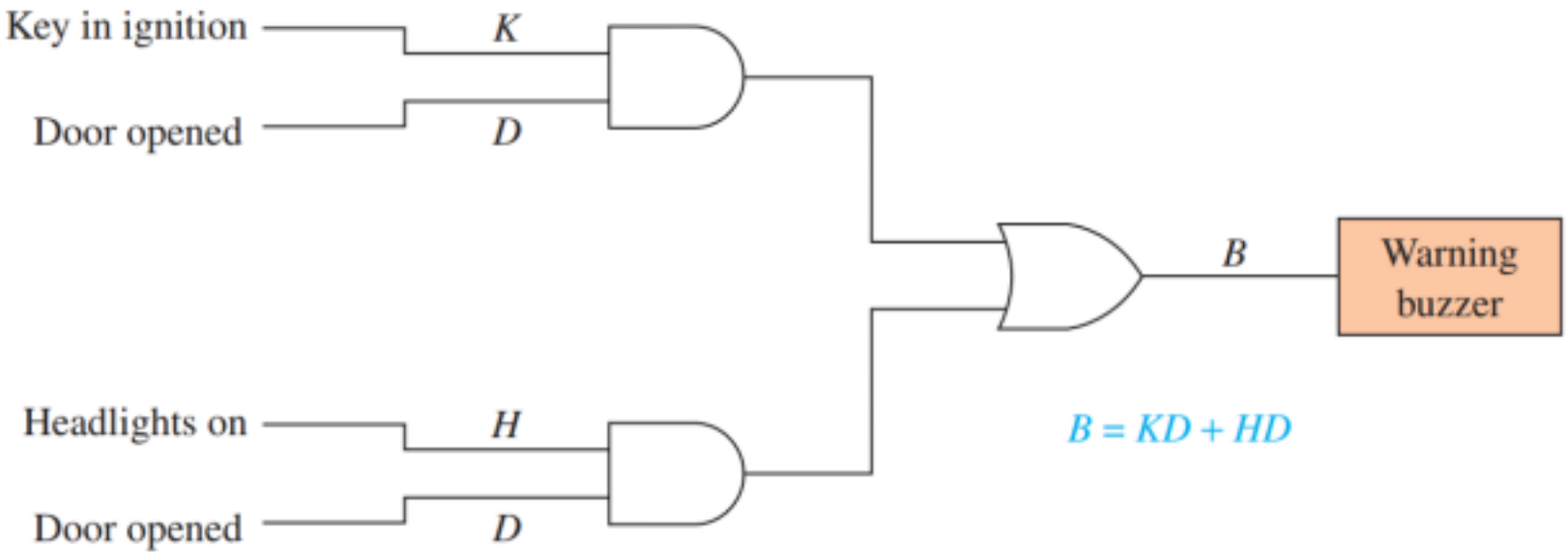
جبر بولی و تکنیک های ساده سازی – بخش یکم



- قوانین و قواعد جبر بولی
- منطق ترکیبی
- پیاده سازی عبارات SOP
- خاصیت عمومی گیت های NAND و NOR
- قضیه دمورگان
- ساده سازی عبارات بولی با قواعد پایه
- روش کوییین– مک کلوسکی
- جدول کارنو

منطق ترکیبی

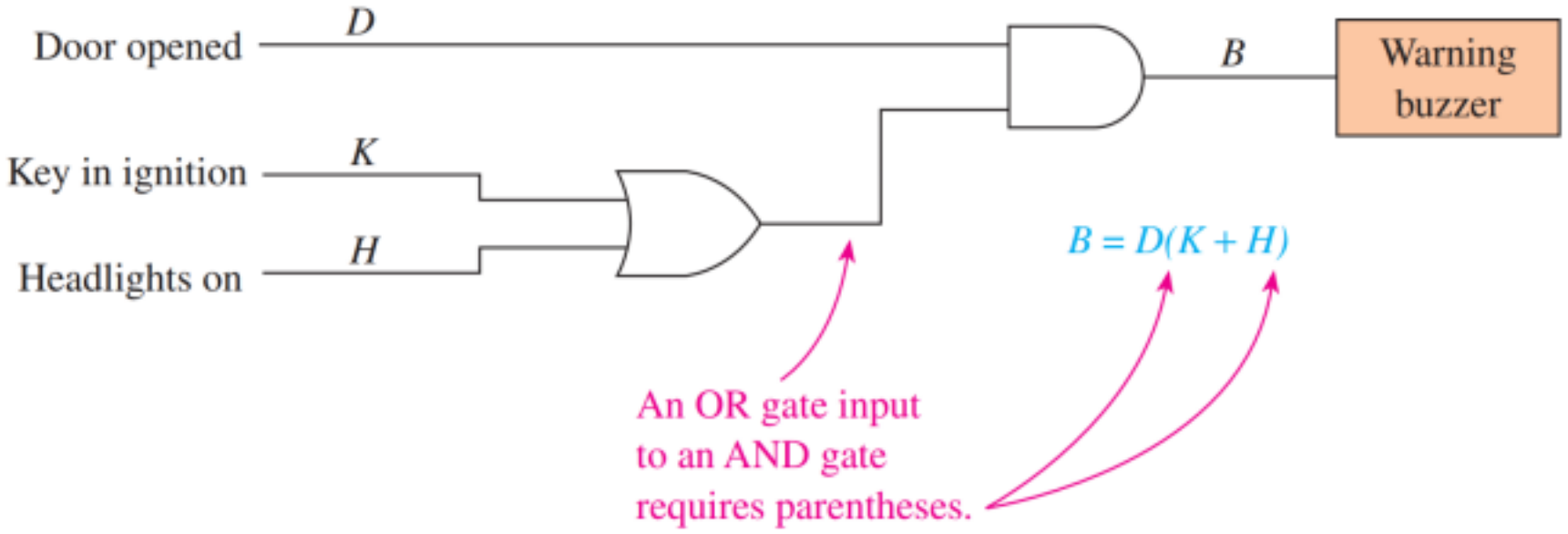
- گیت های پایه عموما به تنهایی کاربرد عملی زیادی ندارند .
- با ترکیب گیت های پایه مدارات منطقی پیچیده ساخته می شود .
- مدارات ترکیبی :مداراتی که وضعیت منطقی خروجی فقط به وضعیت منطقی ورودی ها در همان لحظه وابسته است.



Https://www.drisnet.com

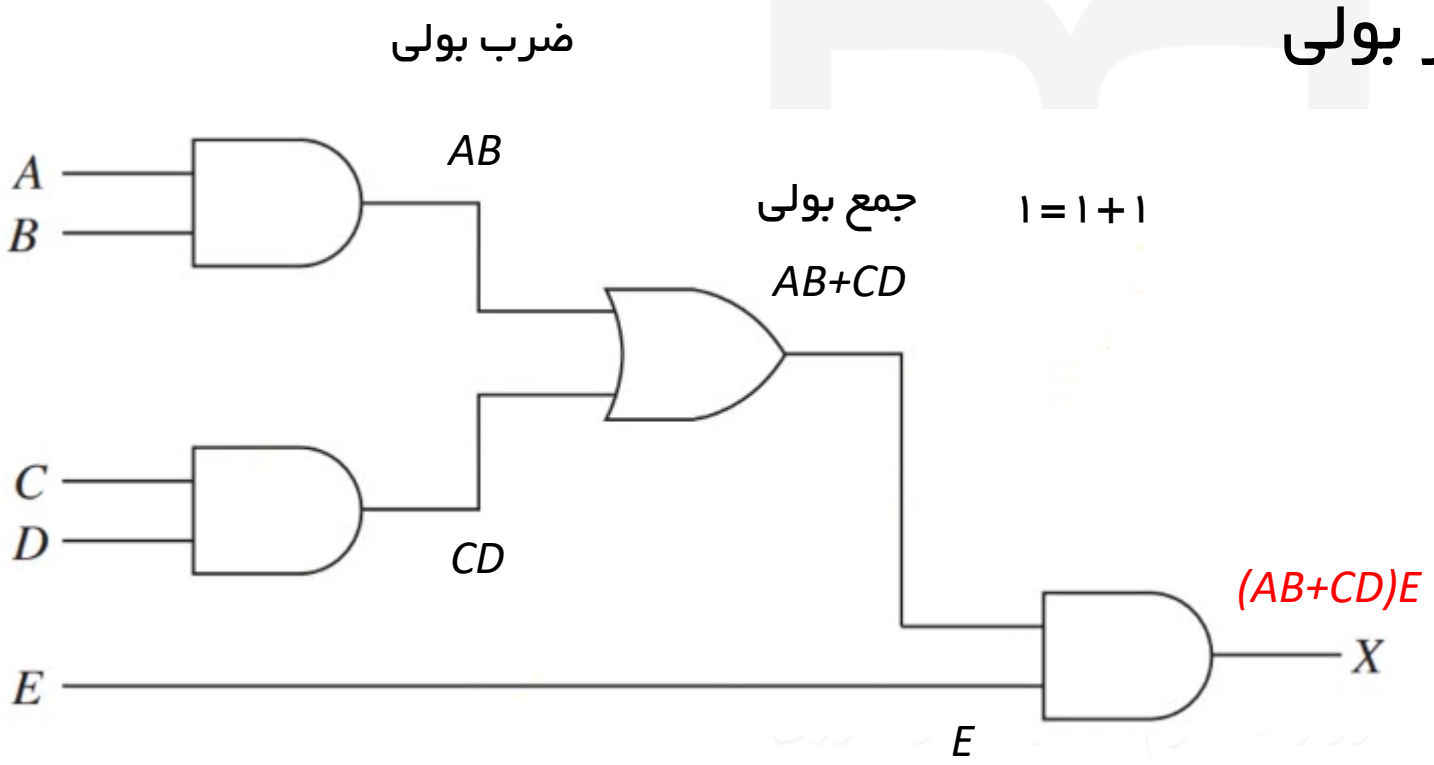
منطق ترکیبی

- برای صرفه جویی در مصرف آی سی ها باید عبارات منطقی را تا حد ممکن ساده سازی نمود.
- با استفاده از جبر بولی می توان مدارات منطقی را ساده سازی نمود



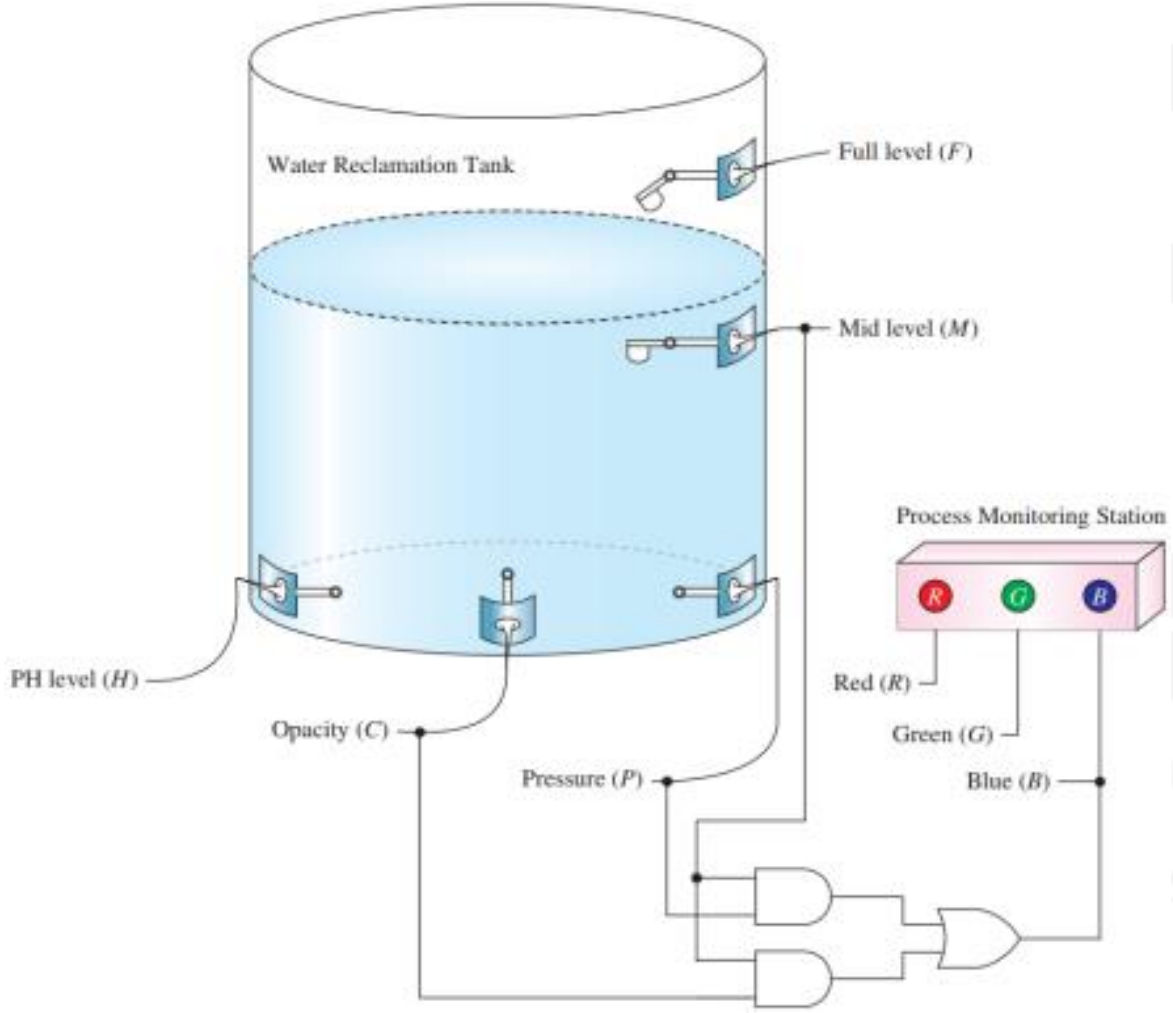
منطق ترکیبی

- تبدیل مدار منطقی به جبر بولی



دانشگاه جیرفت

منطق ترکیبی



- تبدیل اهداف توصیفی به مدار منطقی
- اگر سطح آب متوسط و فشار زیاد باشد، لامپ آبی روشن شود.
- اگر سطح آب متوسط و شفافیت بالا باشد، لامپ آبی هم روشن شود.
- در غیر این صورت لامپ آبی خاموش باشد.

Https://www.drisnet.com

قوانین و قواعد جبر بولی

- بسیاری از قوانین جبر بولی همانند قوانین جبر معمولی است.
- گیت OR بیانگر جمع بولی و گیت AND بیانگر ضرب بولی است.
- قانون جابه جا پذیری

$$A + B = B + A \qquad AB = BA$$

- قانون شرکت پذیری

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A(BC) = (AB)C$$

- قانون توزیع پذیری

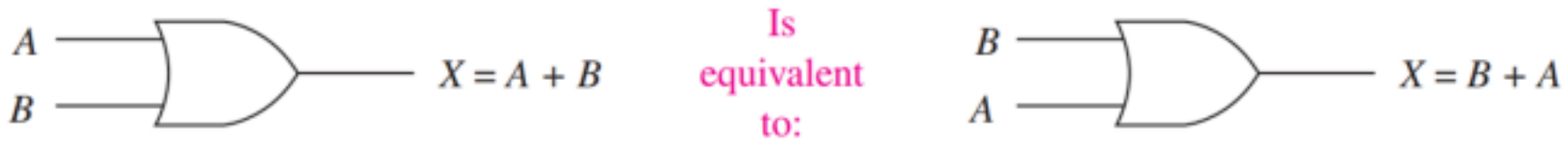
$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD$$

دانشگاه جیرفت

قوانین و قواعد جبر بولی

- نمایش مداری قوانین:

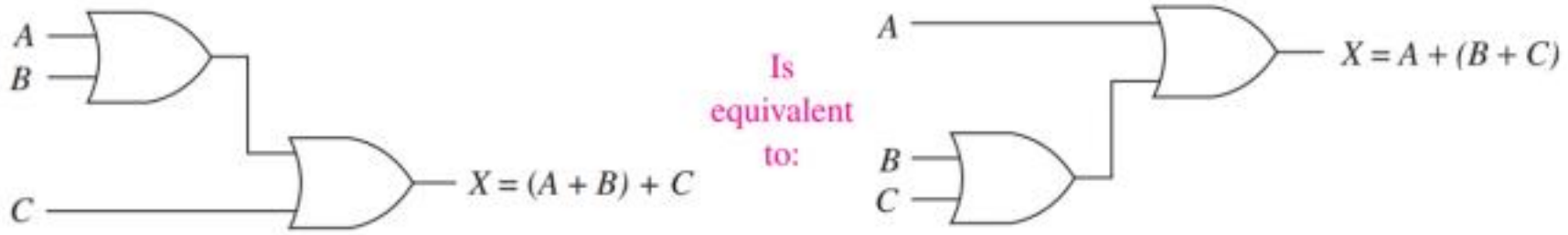


Using the commutative law of addition to rearrange an OR gate.

Using the commutative law of multiplication to rearrange an AND gate.

قوانین و قواعد جبر بولی

- نمایش مداری قوانین:

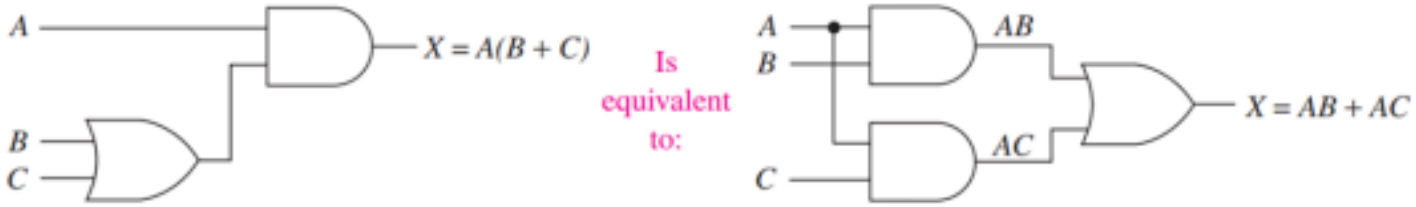


Using the associative law of addition to rearrange the grouping of OR gates.

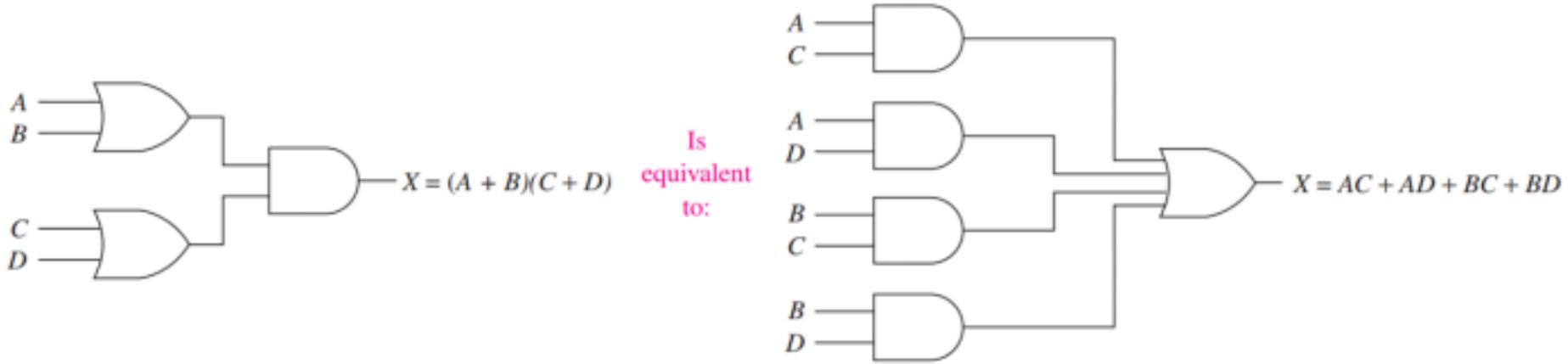
Using the associative law of multiplication to rearrange the grouping of AND gates.

قوانین و قواعد جبر بولی

- نمایش مداری قوانین:



Using the distributive law to form an equivalent circiut.



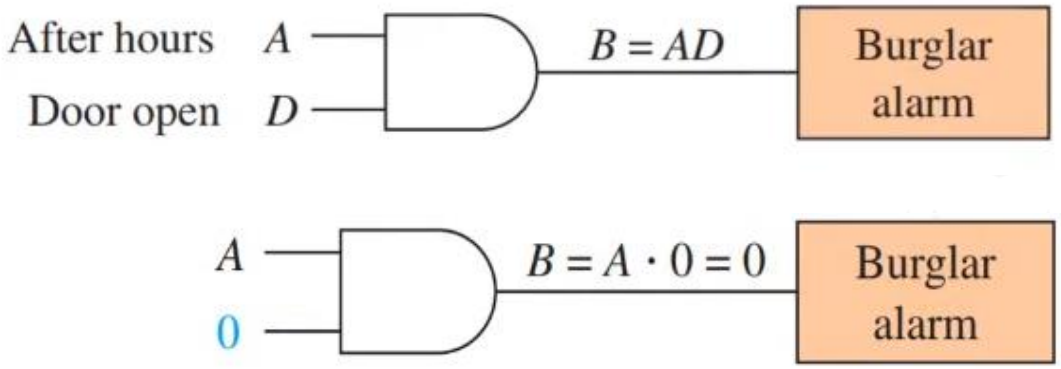
Using the distributive law to form an equivalent circiut (FOIL method).

Https://www.drisnet.com

قوانین و قواعد جبر بولی

- علاوه بر قوانین پایه، قواعد مخصوصی در جبر بولی برای ساده سازی عبارات منطقی وجود دارد.
- قاعده اول AND :صفر منطقی با هر عبارت منطقی دیگر صفر منطقی خواهد شد.

$$A \cdot 0 = 0$$

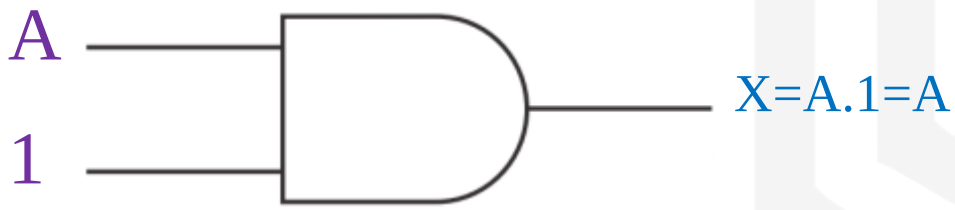


Inputs		Output
A	B	X = AB
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

قوانین و قواعد جبر بولی

•علاوه بر قوانین پایه، قواعد مخصوصی در جبر بولی برای ساده سازی عبارات منطقی وجود دارد.

- قاعده دوم: AND یک منطقی با هر عبارت منطقی دیگر خود آن عبارت خواهد شد.



A	1	X
0	1	0
1	1	1

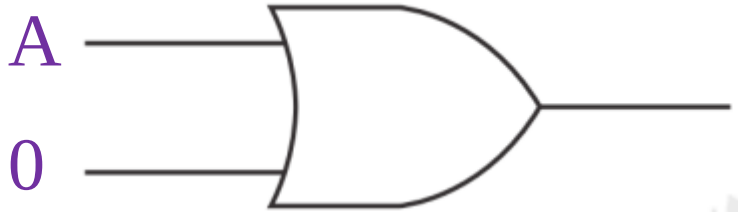
} X equals A

Inputs		Output
A	B	X = AB
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

قوانین و قواعد جبر بولی

•علاوه بر قوانین پایه، قواعد مخصوصی در جبر بولی برای ساده سازی عبارات منطقی وجود دارد.

- قاعده سوم: صفر منطقی با هر عبارت منطقی دیگر خود آن عبارت خواهد شد.



X= A+0 = A

A	0	X
0	0	0
1	0	1

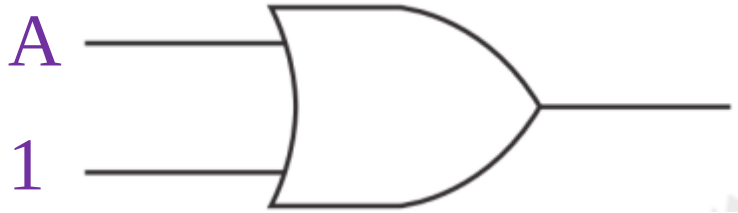
} X equals A

Inputs		Output
A	B	X = A + B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

قوانین و قواعد جبر بولی

•علاوه بر قوانین پایه، قواعد مخصوصی در جبر بولی برای ساده سازی عبارات منطقی وجود دارد.

- قاعده چهارم: OR یک منطقی با هر عبارت منطقی دیگر یک منطقی خواهد شد.



A	1	X
0	1	1
1	1	1

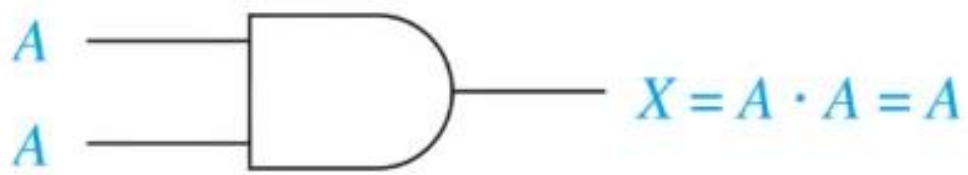
} X equals 1

Inputs		Output
A	B	X = A + B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

قوانین و قواعد جبر بولی

•علاوه بر قوانین پایه، قواعد مخصوصی در جبر بولی برای ساده سازی عبارات منطقی وجود دارد.

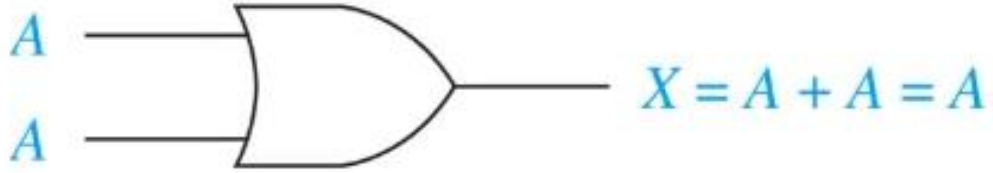
- قاعده پنجم: AND هر عبارت منطقی با خودش، خود آن عبارت خواهد شد.



A	A	X
0	0	0
1	1	1

} X equals A

- قاعده ششم: OR هر عبارت منطقی با خودش، خود آن عبارت خواهد شد.



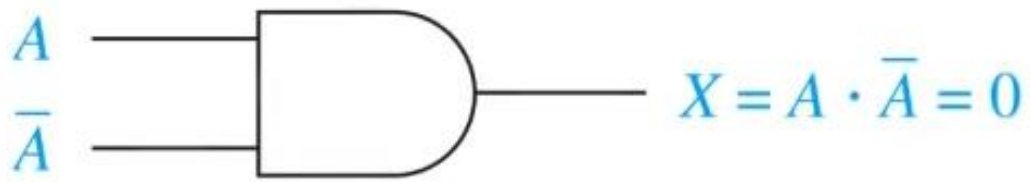
A	A	X
0	0	0
1	1	1

} X equals A

قوانین و قواعد جبر بولی

•علاوه بر قوانین پایه، قواعد مخصوصی در جبر بولی برای ساده سازی عبارات منطقی وجود دارد.

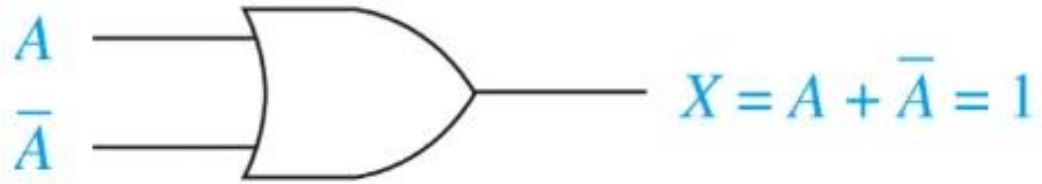
- قاعده هفتم: AND هر عبارت منطقی با مکملش، صفر منطقی خواهد شد.



A	$\bar{A}$	X
0	1	0
1	0	0

} X equals 0

- قاعده هشتم: OR هر عبارت منطقی با مکملش، یک منطقی خواهد شد.



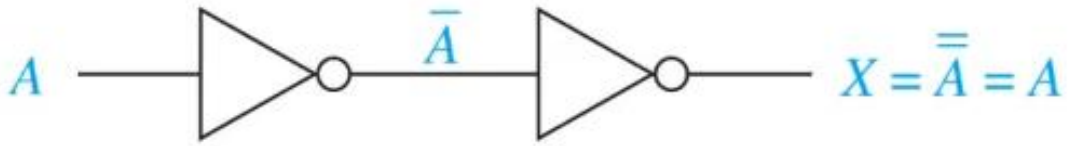
A	$\bar{A}$	X
0	1	1
1	0	1

} X equals 1

قوانین و قواعد جبر بولی

•علاوه بر قوانین پایه، قواعد مخصوصی در جبر بولی برای ساده سازی عبارات منطقی وجود دارد.

- قاعده نهم: اگر از یک عبارت منطقی دو بار مکمل بگیریم، خود آن عبارت حاصل می شود.



A	$\bar{A}$	$\bar{\bar{A}}$	X
0	1	0	0
1	0	1	1

} X equals A

- قاعده دهم:

$$A + \bar{A}B = A + B$$

A	B	$A + \bar{A}B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

↑ Equivalent

A	B	$\bar{A} + AB$	$\bar{A} + B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

↑ ↑ Equivalent outputs

Https://www.arshet.com

قوانین و قواعد جبر بولی

- جمع‌بندی

Rules

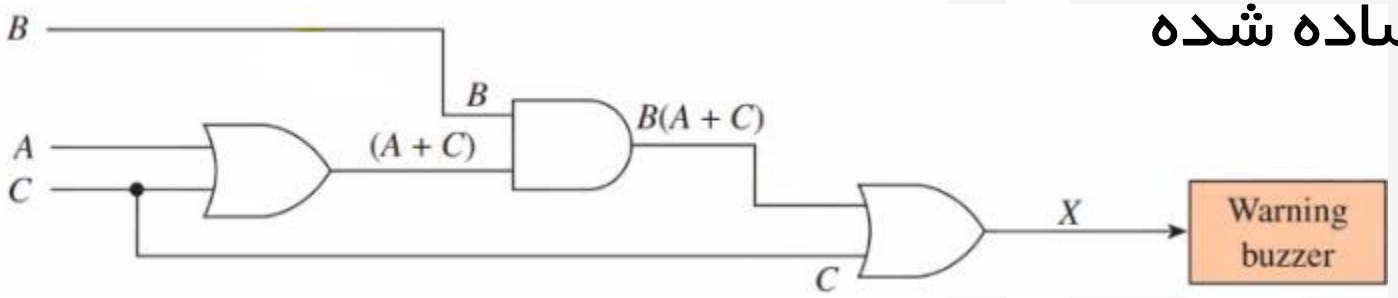
1		$A \cdot 0 = 0$
2		$A \cdot 1 = A$
3		$A + 0 = A$
4		$A + 1 = 1$
5		$A \cdot A = A$
6		$A + A = A$
7		$A \cdot \overline{A} = 0$
8		$A + \overline{A} = 1$
9		$\overline{\overline{A}} = A$
10	(a)	$A + \overline{A}B = A + B$
	(b)	$\overline{A} + AB = \overline{A} + B$

Laws

1	$A + B = B + A$
	$AB = BA$
2	$A + (B + C) = (A + B) + C$
	$A(BC) = (AB)\,C$
3	$A(B + C) = AB + AC$
	$(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD$

ساده سازی عبارات بولی با قواعد پایه

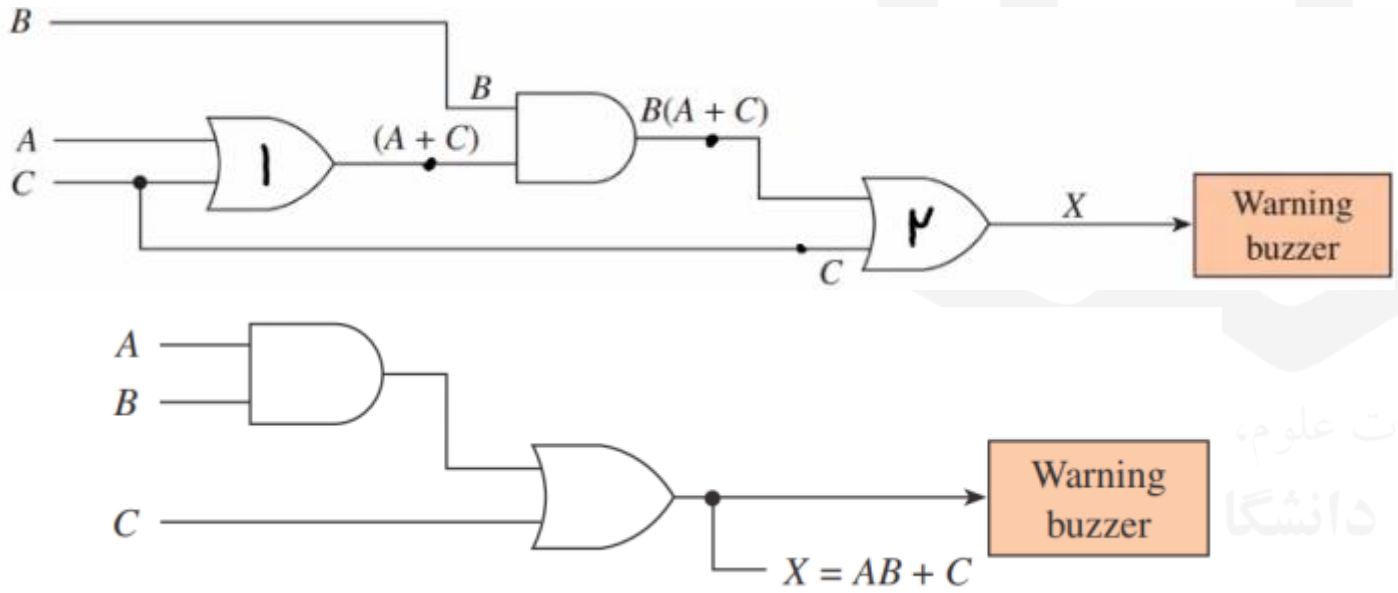
- الگوریتم: تبدیل مدار منطقی به جبر بولی، سپس ساده سازی با قواعد و نهایتا رسم مدار ساده شده



وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه جیرفت

ساده سازی عبارات بولی با قواعد پایه

- الگوریتم :تبدیل مدار منطقی به جبر بولی، سپس ساده سازی با قواعد و نهایتا رسم مدار ساده شده

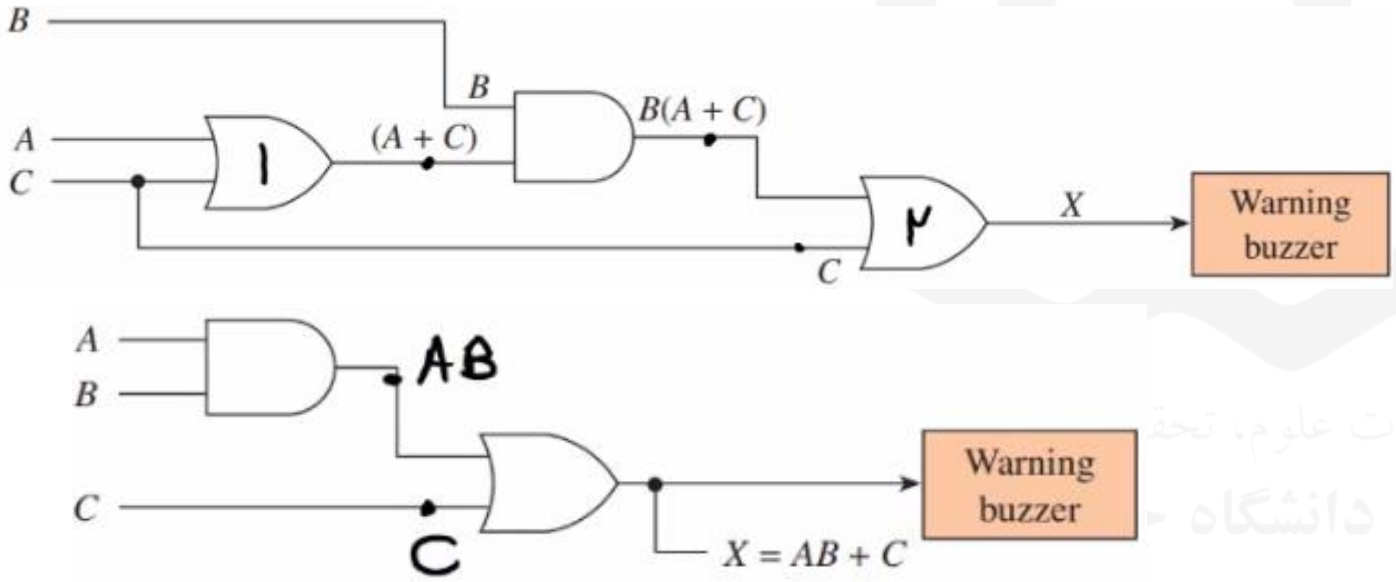


$$X = C + B(A+C)$$
$$= C + AB + BC$$
$$= C(1+B) + AB$$
$$= C + AB$$

OR AND

ساده سازی عبارات بولی با قواعد پایه

- الگوریتم :تبدیل مدار منطقی به جبر بولی، سپس ساده سازی با قواعد و نهایتا رسم مدار ساده شده

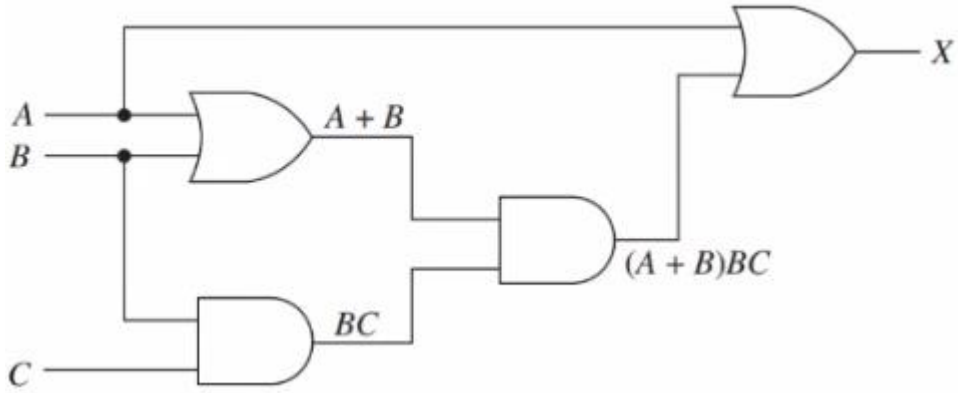


$$X = C + B(A+C)$$
$$= C + AB + BC$$
$$= C(1+B) + AB$$
$$= C + AB$$

OR AND

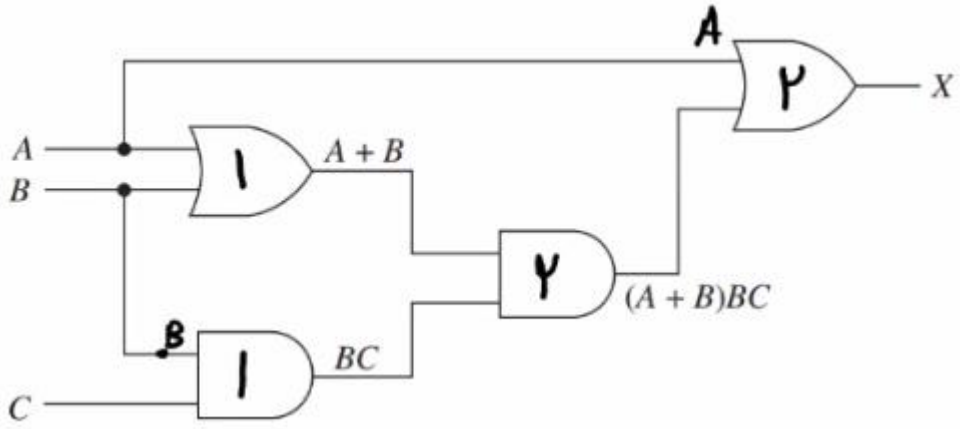
ساده سازی عبارات بولی با قواعد پایه

- الگوریتم :تبدیل مدار منطقی به جبر بولی، سپس ساده سازی با قواعد و نهایتا رسم مدار ساده شده



ساده سازی عبارات بولی با قواعد پایه

- الگوریتم :تبدیل مدار منطقی به جبر بولی، سپس ساده سازی با قواعد و نهایتا رسم مدار ساده شده

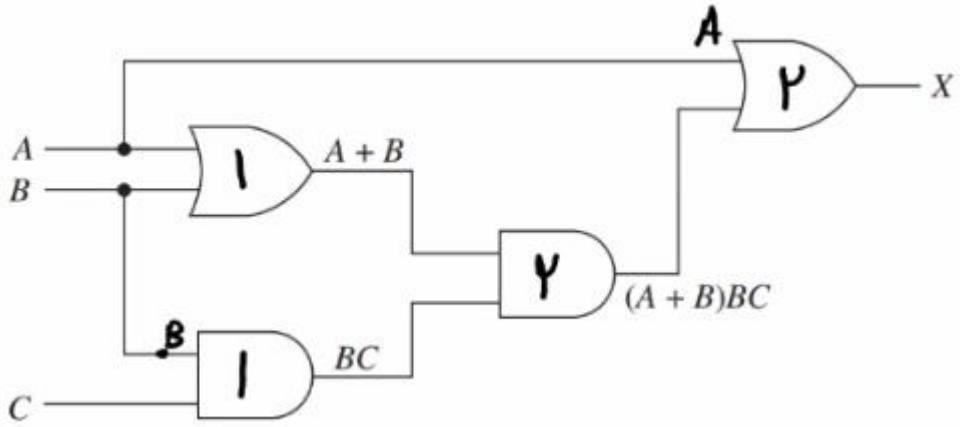


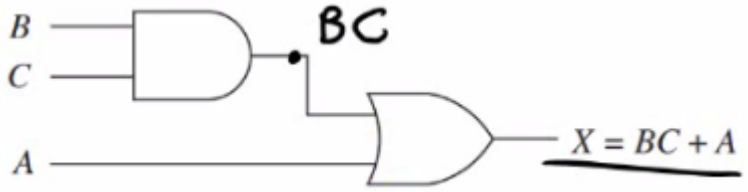
$$X = A + (A+B)BC$$
$$= A + ABC + BBC$$
$$= A(1 + BC) + BC$$
$$= A + BC$$

OR — AND

ساده سازی عبارات بولی با قواعد پایه

- الگوریتم :تبدیل مدار منطقی به جبر بولی، سپس ساده سازی با قواعد و نهایتا رسم مدار ساده شده



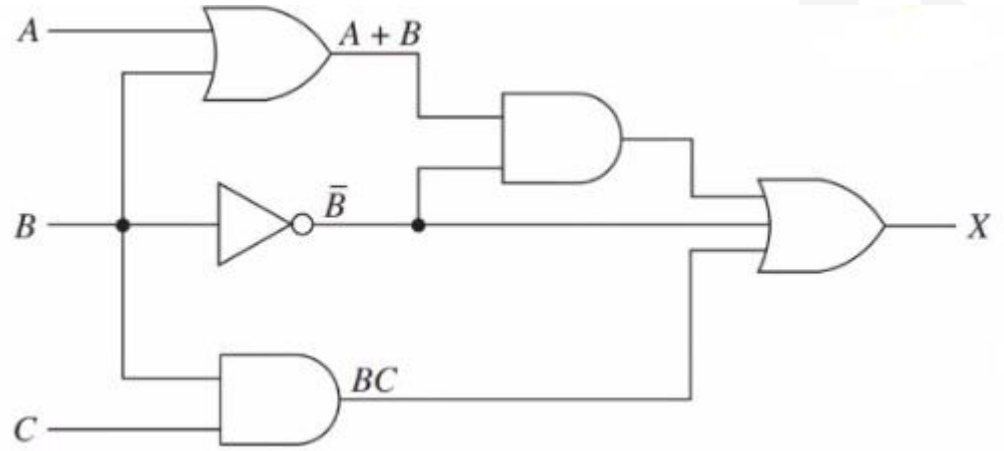


$$X = A + (A+B)BC$$
$$= A + ABC + BBC$$
$$= A(1 + BC) + BC$$
$$= A + BC$$

OR — AND

ساده سازی عبارات بولی با قواعد پایه

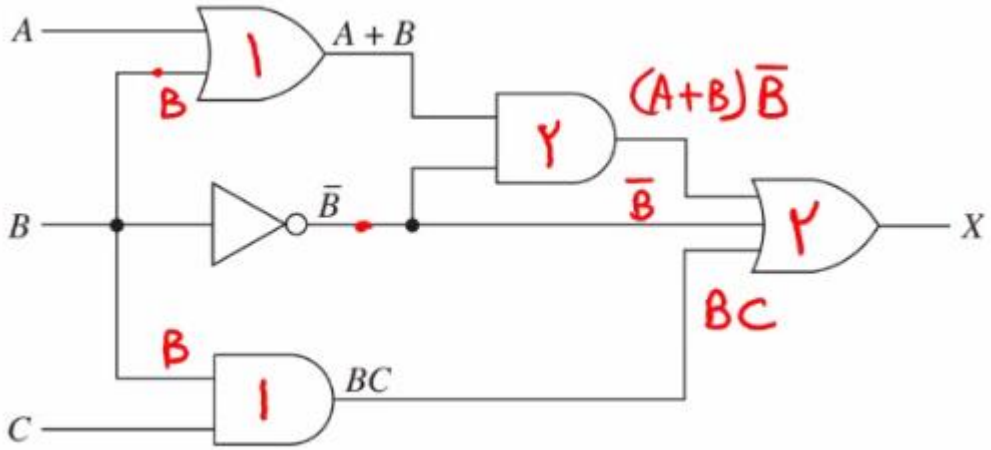
- الگوریتم :تبدیل مدار منطقی به جبر بولی، سپس ساده سازی با قواعد و نهایتا رسم مدار ساده شده

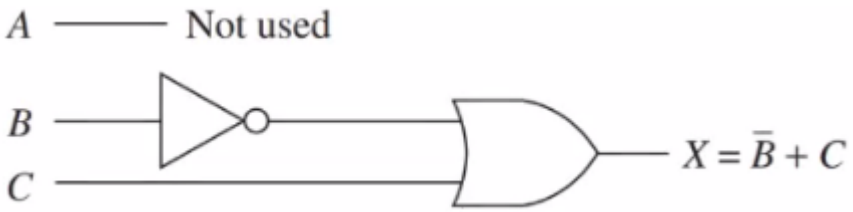


وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه جیرفت

ساده سازی عبارات بولی با قواعد پایه

- الگوریتم :تبدیل مدار منطقی به جبر بولی، سپس ساده سازی با قواعد و نهایتا رسم مدار ساده شده





$$X = [BC + \bar{B}] + (A+B)\bar{B}$$

$$= \bar{B} + C + A\bar{B} + B\bar{B}$$

$$= \bar{B} + C + A\bar{B} + 0$$

$$= C + \bar{B}(1 + A)$$

$$= C + \bar{B}$$

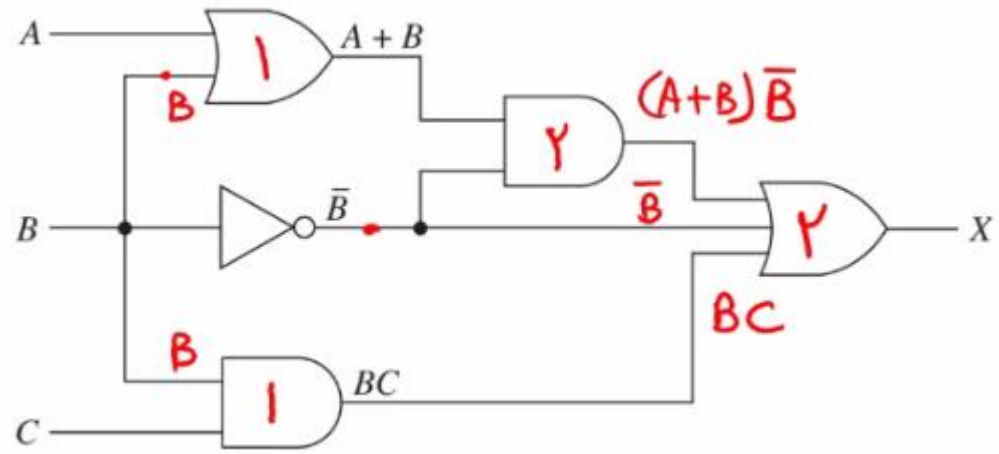
$1 + A \rightarrow$ not

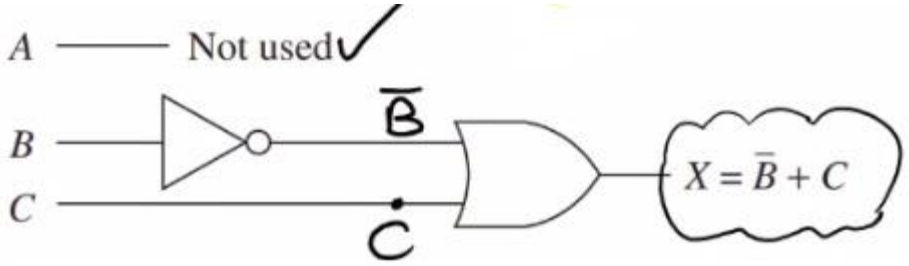
$C + \bar{B} \leftarrow$ or

Https://www.drisnet.com

ساده سازی عبارات بولی با قواعد پایه

- الگوریتم :تبدیل مدار منطقی به جبر بولی، سپس ساده سازی با قواعد و نهایتا رسم مدار ساده شده





$$X = [BC + \bar{B}] + (A+B)\bar{B}$$

$$= \bar{B} + C + A\bar{B} + B\bar{B}$$

$$= \bar{B} + C + A\bar{B} + 0$$

$$= C + \bar{B}(1+A)$$

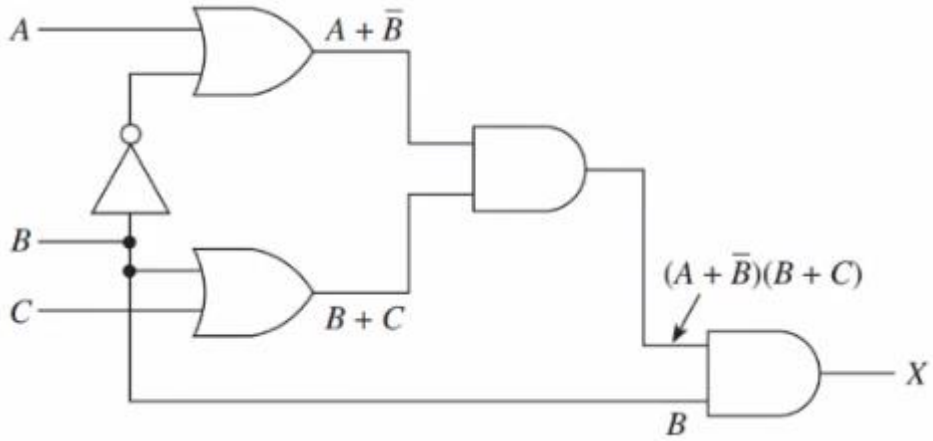
$$= C + \bar{B}$$

not

or

ساده سازی عبارات بولی با قواعد پایه

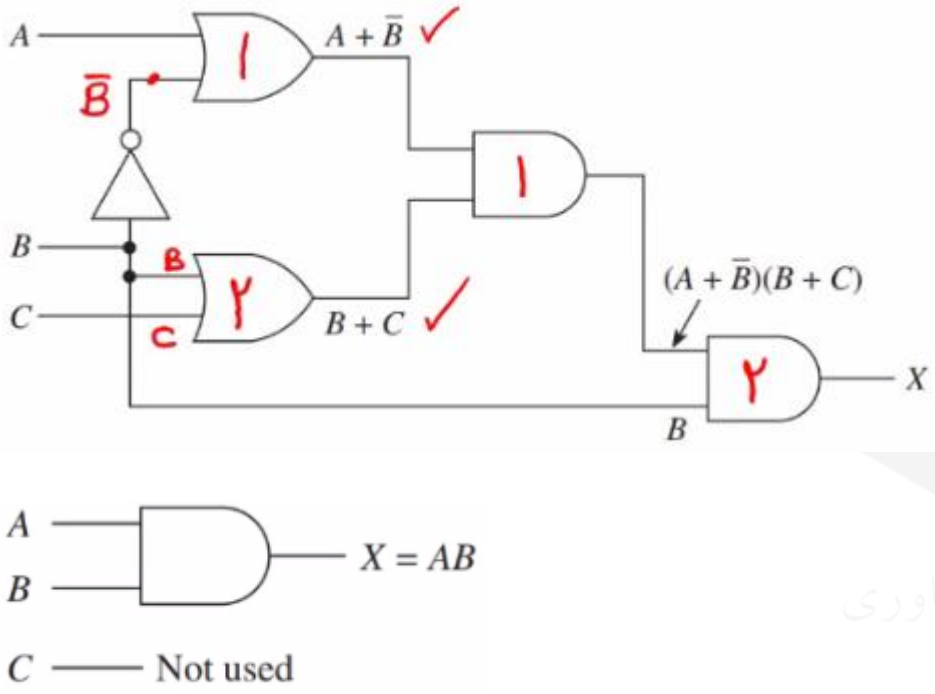
- الگوریتم :تبدیل مدار منطقی به جبر بولی، سپس ساده سازی با قواعد و نهایتا رسم مدار ساده شده



وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه جیرفت

ساده سازی عبارات بولی با قواعد پایه

- الگوریتم :تبدیل مدار منطقی به جبر بولی، سپس ساده سازی با قواعد و نهایتا رسم مدار ساده شده



$$X = B(A+\bar{B})(B+C)$$

$$= (AB + B\bar{B})(B+C)$$

$$= AB(B+C)$$

$$= A(B+BC)$$

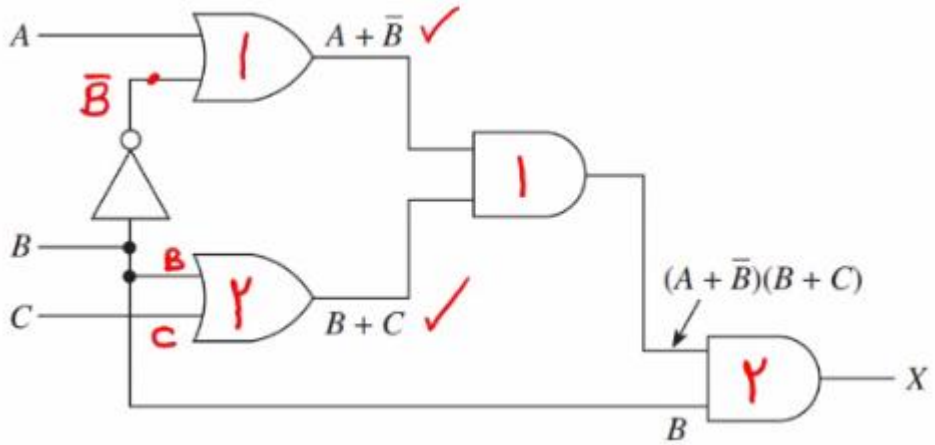
$$= AB(1+C)$$

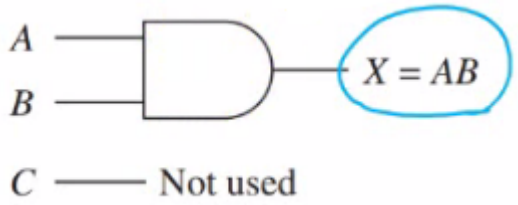
$$= AB$$

Https://www.drisnet.co...

ساده سازی عبارات بولی با قواعد پایه

- الگوریتم :تبدیل مدار منطقی به جبر بولی، سپس ساده سازی با قواعد و نهایتا رسم مدار ساده شده





$$X = B(A+\bar{B})(B+C)$$

$$= (AB + B\bar{B})(B+C)$$

$$= AB(B+C)$$

$$= A(B+BC)$$

$$= AB(1+C)$$

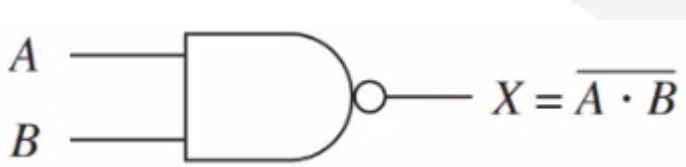
$$= AB$$

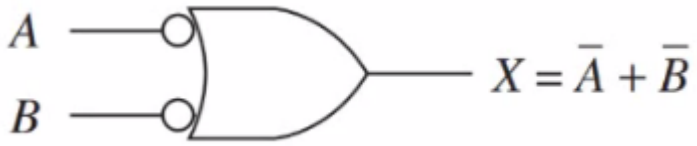
قضیه دمورگان

- برای ساده سازی مدارات شامل گیت های NAND و NOR از قضیه دمورگان استفاده می کنیم.
- هدف :تبدیل مکمل عبارات پیچیده به AND و OR عبارات ساده تر

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B} \qquad \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$\overline{A \cdot B \cdot C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} \qquad \overline{A + B + C} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$



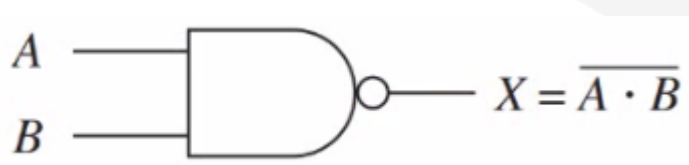


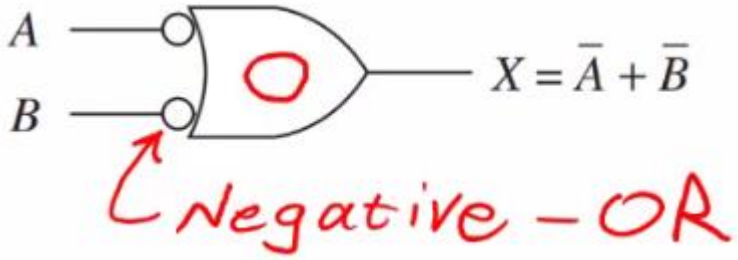
قضیه دمورگان

- برای ساده سازی مدارات شامل گیت های NAND و NOR از قضیه دمورگان استفاده می کنیم.
- هدف :تبدیل مکمل عبارات پیچیده به AND و OR عبارات ساده تر

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B} \qquad \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

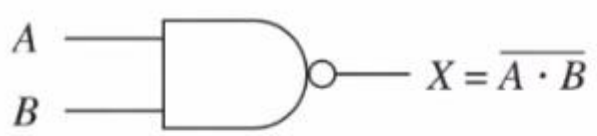
$$\overline{A \cdot B \cdot C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} \qquad \overline{A + B + C} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

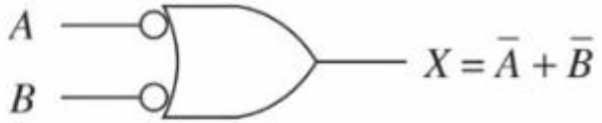




قضیه دمورگان

- اثبات با تشکیل جدول درستی





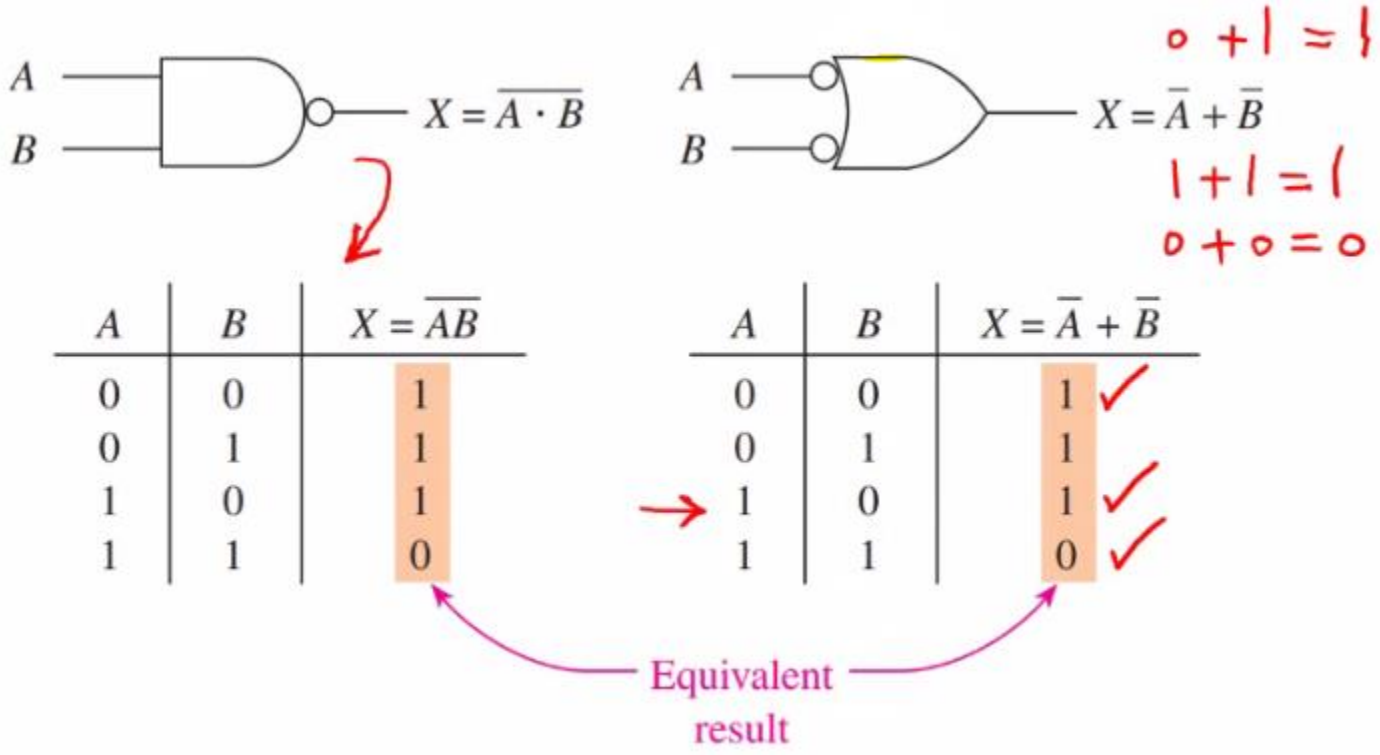
A	B	$X = \overline{AB}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A	B	$X = \bar{A} + \bar{B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Equivalent result

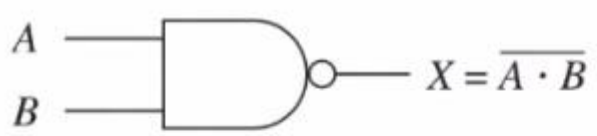
قضیه دمورگان

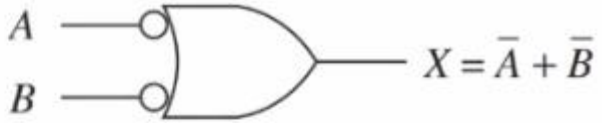
- اثبات با تشکیل جدول درستی



قضیه دمورگان

- اثبات با تشکیل جدول درستی





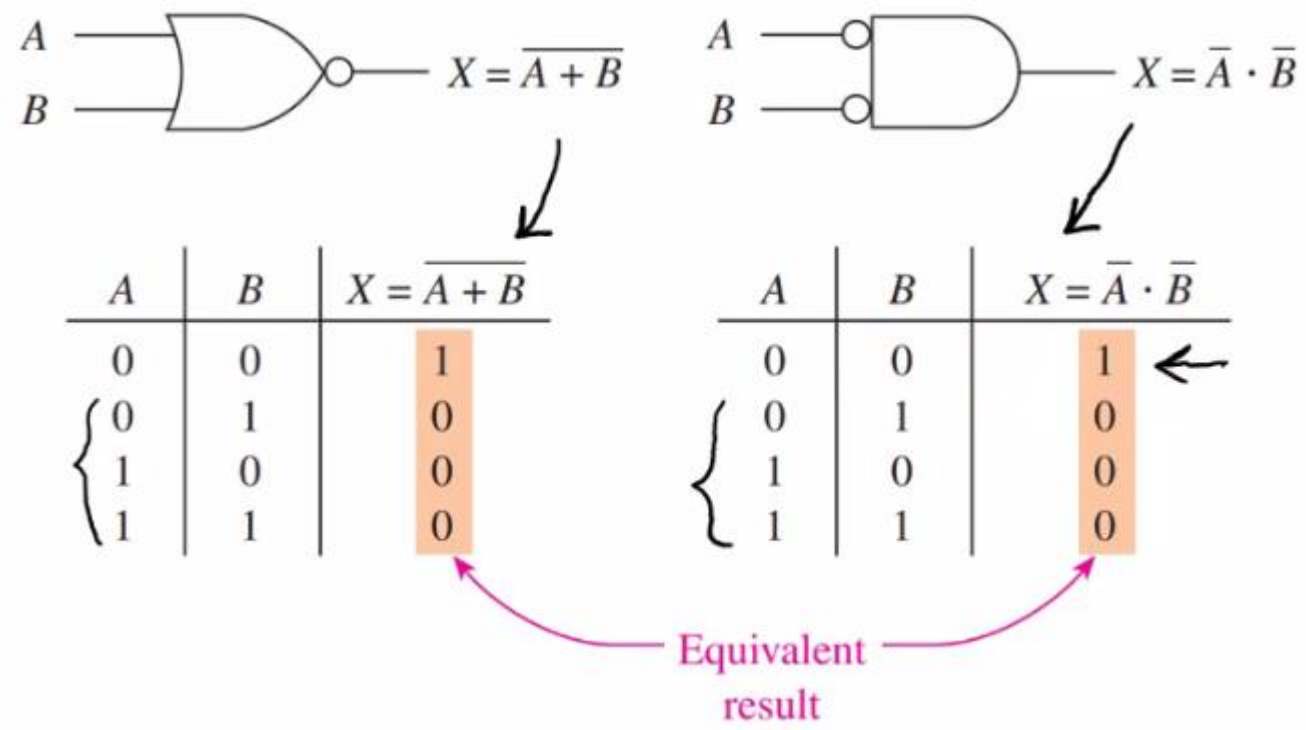
A	B	$X = \overline{AB}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A	B	$X = \bar{A} + \bar{B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Equivalent result

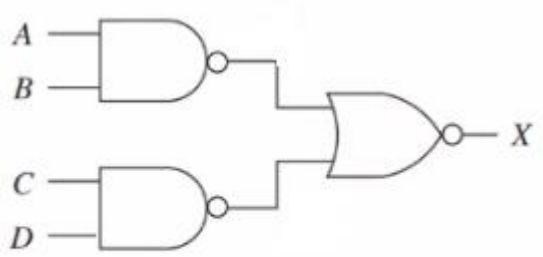
قضیه دمورگان

- اثبات با تشکیل جدول درستی



قضیه دمورگان

- ساده سازی با قضیه دمورگان

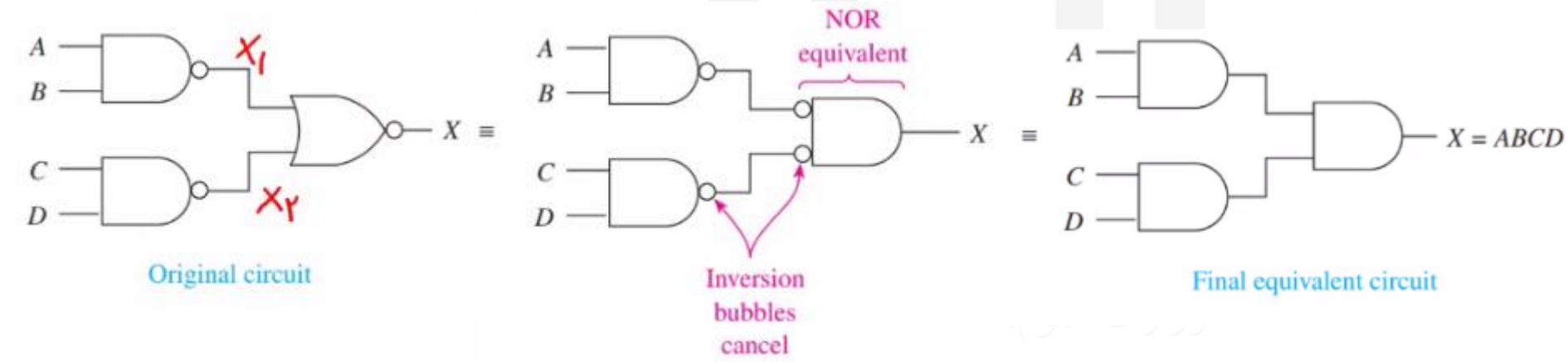


Original circuit

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه جیرفت

قضیه دمورگان

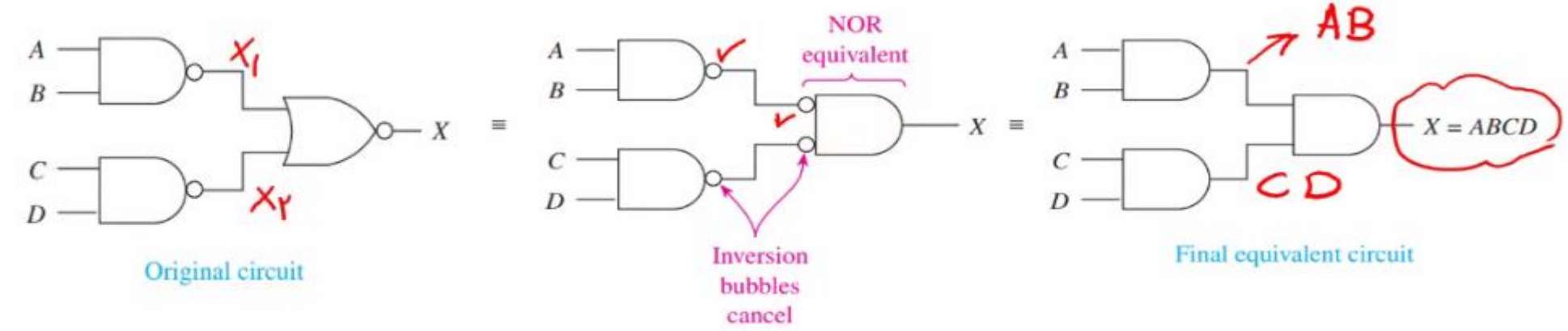
- ساده سازی با قضیه دمورگان



قضیه دمورگان

- ساده سازی با قضیه دمورگان

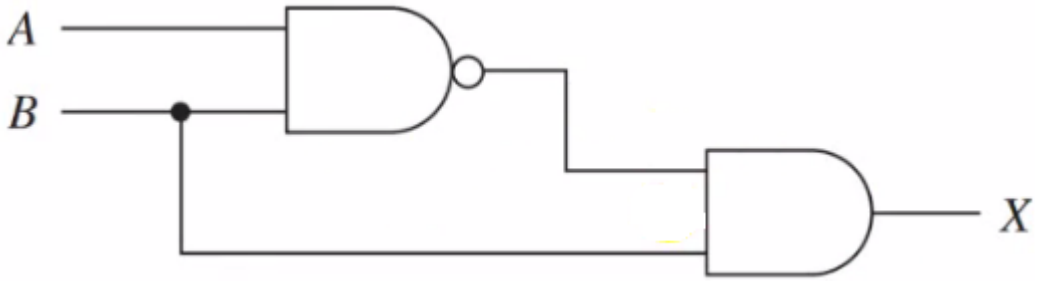
$\bar{\bar{A}} = A$



دانشگاه جیرفت

قضیه دمورگان

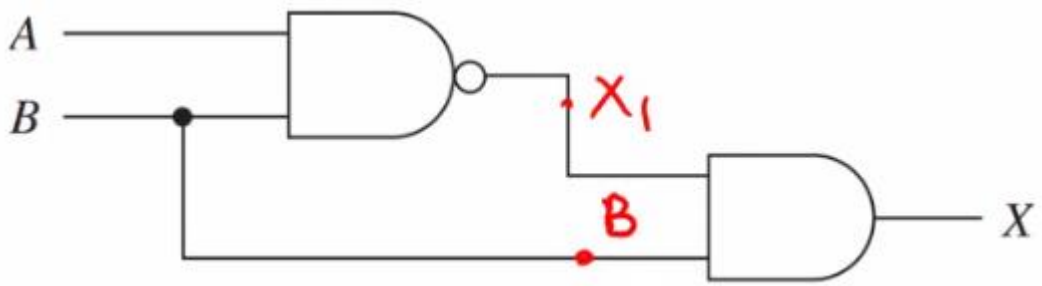
- ساده سازی با قضیه دمورگان



وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه جیرفت

قضیه دمورگان

- ساده سازی با قضیه دمورگان

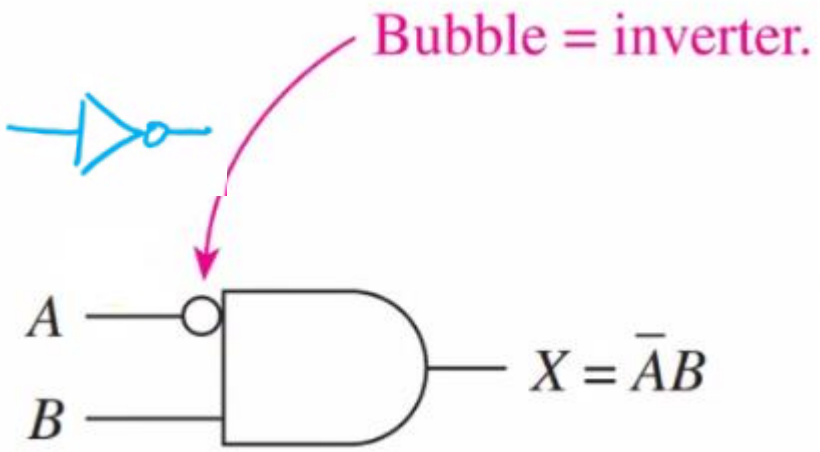


$$X_1 = \overline{A\,B} = \bar{A} + \bar{B}$$

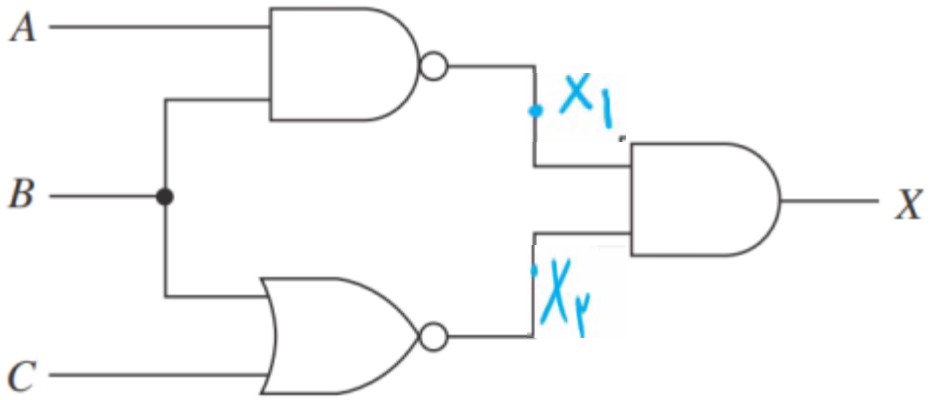
$$X = (\bar{A} + \bar{B})\,B$$

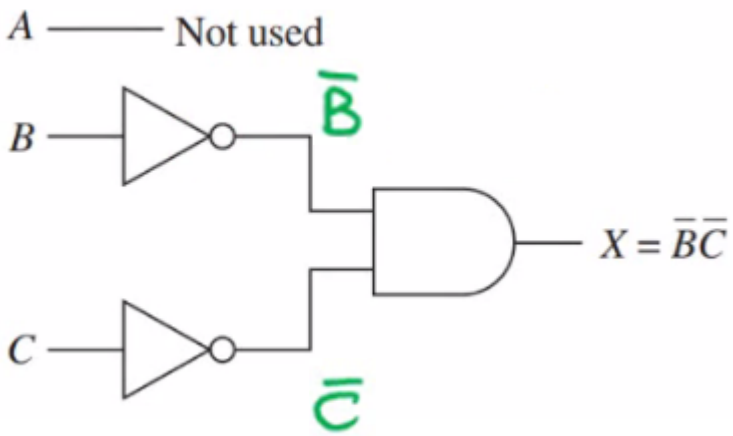
$$= \bar{A}B + \bar{B}B^{\circ}$$

$$= \bar{A}B$$



قضیه دمورگان





- ساده سازی با قضیه دمورگان

$$X_1 = \overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$$

$$X_2 = \overline{B+C} = \bar{B}\bar{C}$$

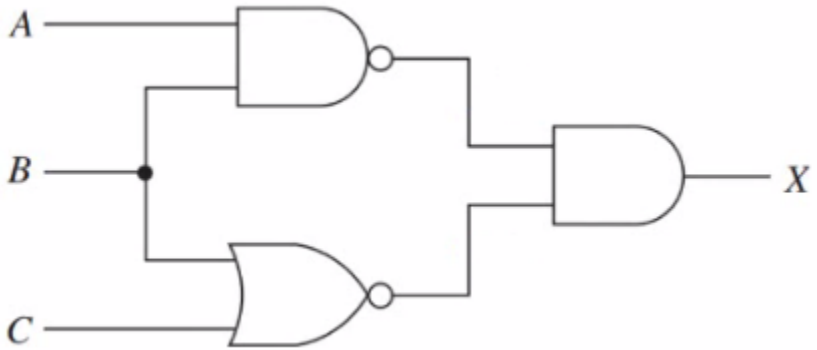
$$X = \bar{B}\bar{C}(\bar{A} + \bar{B})$$

$$= \bar{C}(\bar{B} + \bar{B}\bar{A})$$

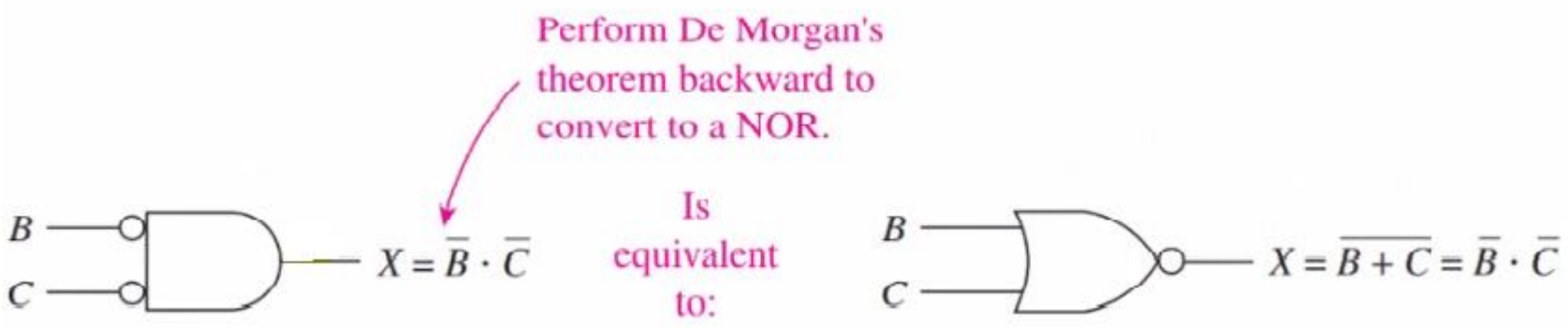
$$= \bar{B}\bar{C}(1 + \bar{A}) = \bar{B}\bar{C}$$

قضیه دمورگان

- ساده سازی با قضیه دمورگان

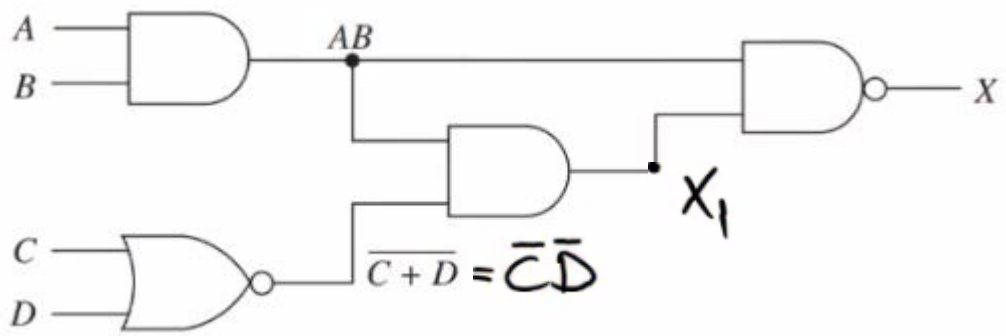


۳ آی‌سی



قضیه دمورگان

- ساده سازی با قضیه دمورگان



$$X_1 = AB\bar{C}\bar{D}$$

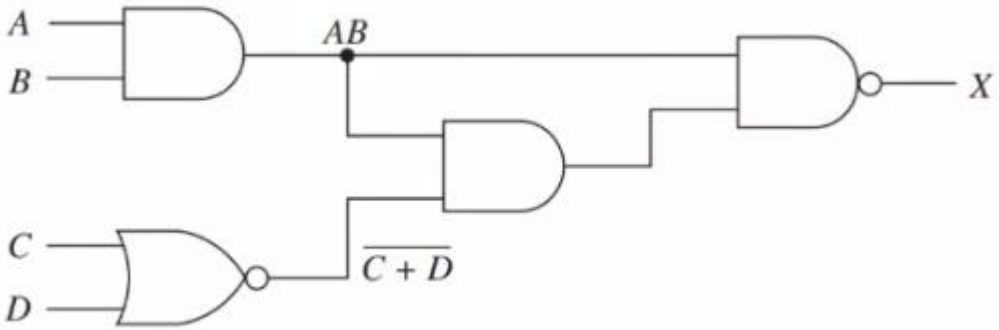
$$X = \overline{\bar{A}\bar{B}\;\overline{AB\bar{C}\bar{D}}}$$

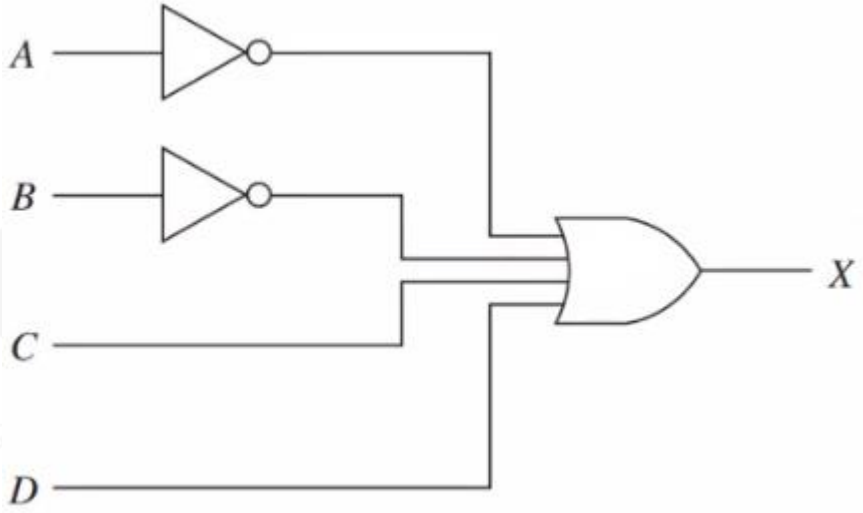
$$X = \overline{AB\bar{C}\bar{D}} = \bar{A} + \bar{B} + C + D$$

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه جیرفت

قضیه دمورگان

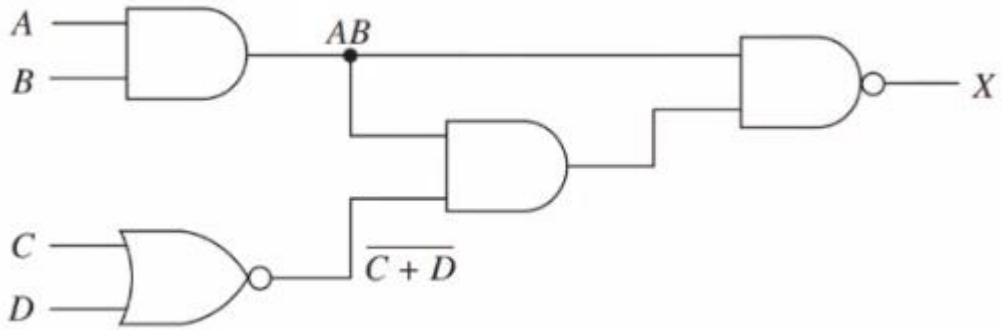
- ساده سازی با قضیه دمورگان



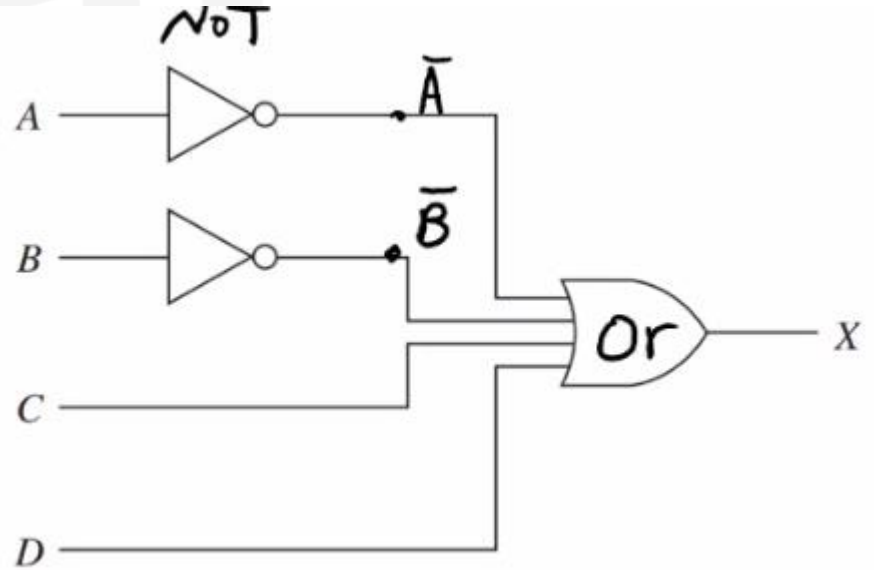


قضیه دمورگان

- ساده سازی با قضیه دمورگان

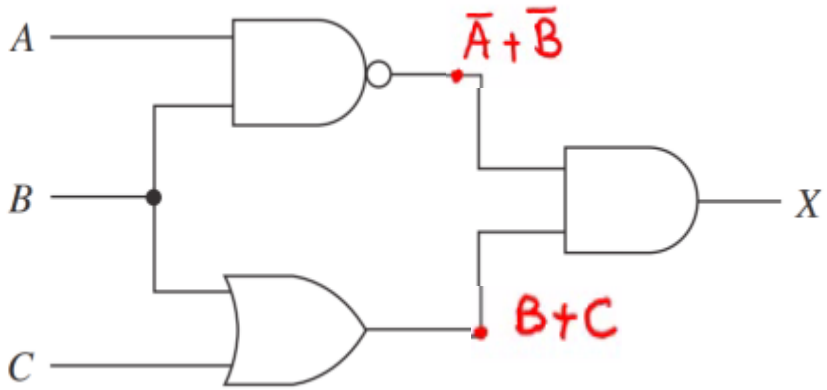


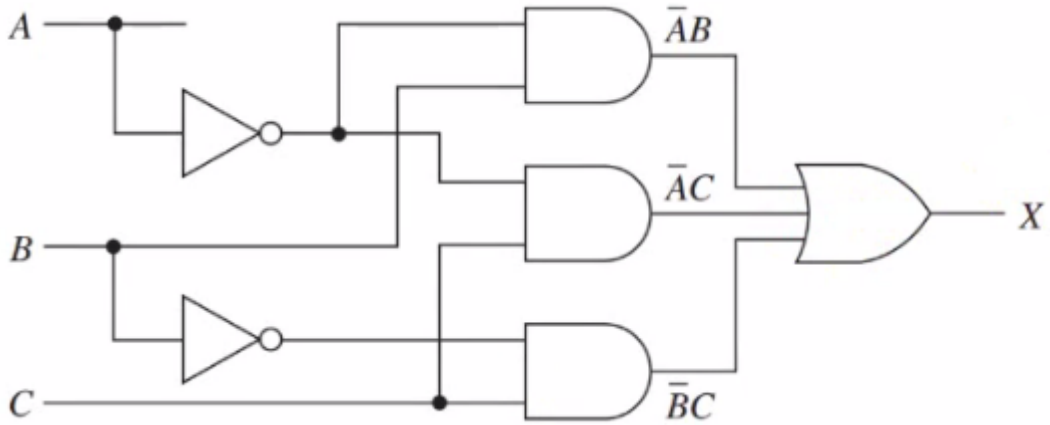
$$X = [\bar{A} + \bar{B}] + C + D$$
$$= [\overline{AB} + C + D]$$



قضیه دمورگان

- ساده سازی با قضیه دمورگان
- استفاده از قوانین پایه لزوما منجر به ساده سازی نمی شود.
- فرم (SOP) Sum Of Products.
- مزیت SOP:تشکیل سریع جدول درستی





$$X = (\bar{A}+\bar{B})(B+C)$$

$$= \bar{A}B + \bar{A}C + \bar{B}C$$

Or-۳

قضیه دمورگان

$$X = \overline{A \cdot \overline{B}} + \overline{A \cdot (\overline{A} + C)}$$

$$= \overline{A} + B + \overline{A} + \overline{\overline{A} + C}$$

$$= \overline{A} + B + A\overline{C}$$

$$= \overline{A} + \overline{C} + B$$

- تشکیل جدول درستی از روی عبارت بولی

A	B	C	$X = \overline{A} + \overline{C} + B$
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

قضیه دمورگان

$$X = \overline{A \cdot \overline{B}} + \overline{A \cdot (\overline{A} + C)}$$

$$= \bar{A} + B + \bar{A} + \overline{\bar{A} + C}$$

$$= \underline{\bar{A}} + B + \underline{A\bar{C}}$$

$$= \bar{A} + \bar{C} + B$$

- تشکیل جدول درستی از روی عبارت بولی

SoP

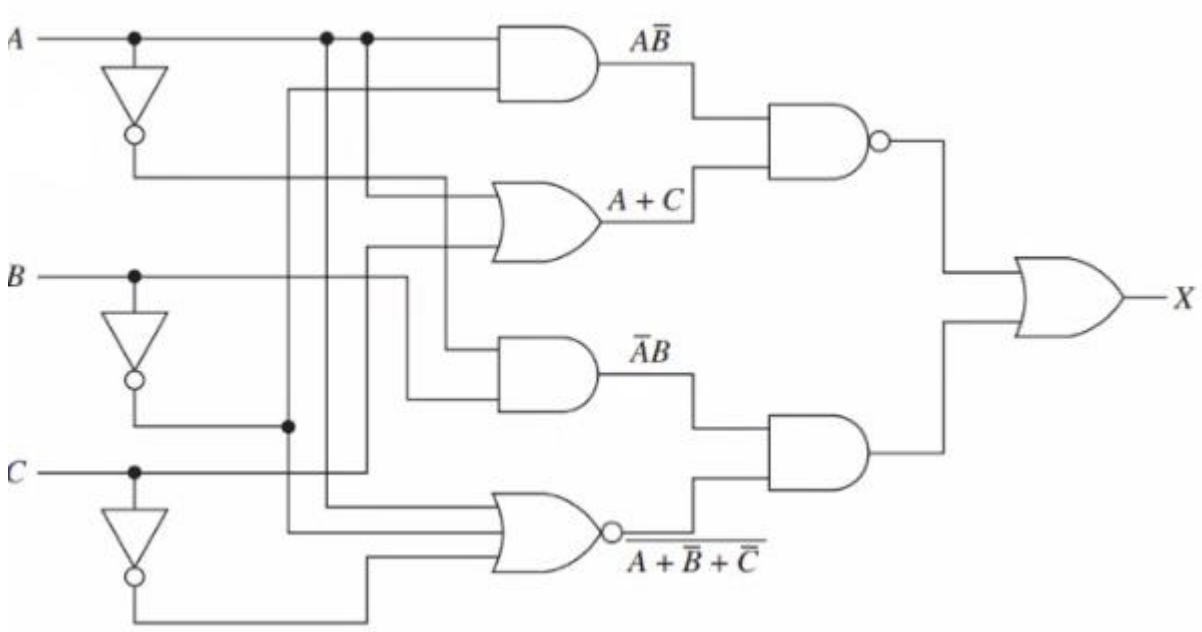
$X = \bar{A} + \bar{C} + B = 1$

A	B	C	X
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

قضیه دمورگان

- تشکیل جدول درستی از روی عبارت بولی

$$X = \overline{A\overline{B} \cdot (A + C)} + \overline{A}B \cdot \overline{A + \overline{B} + \overline{C}}$$



قضیه دمورگان

- تشکیل جدول درستی از روی عبارت بولی

$$X = \overline{A\bar{B}} \cdot (A + C) + \bar{A}B \cdot \overline{A + \bar{B} + \bar{C}}$$

$$= \overline{A\bar{B}} + \overline{A+C} + \bar{A}B(\bar{A}BC)$$

$$= (\bar{A}+B) + \bar{A}\bar{C} + \bar{A}BC = \bar{A}(1+BC) + B + \bar{A}\bar{C}$$

$$= \bar{A}(1+\bar{C}) + B = \bar{A} + B$$

قضیه دمورگان

$$X = \overline{A\overline{B} \cdot (A + C)} + \overline{A}B \cdot \overline{A + \overline{B} + \overline{C}}$$

- تشکیل جدول درستی از روی عبارت بولی

A	B	C	$X = \overline{A} + B$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

دانشگاه جیرفت

قضیه دمورگان

$$X = \overline{A\overline{B} \cdot (A + C)} + \overline{A}B \cdot \overline{A + \overline{B} + \overline{C}}$$

- تشکیل جدول درستی از روی عبارت بولی

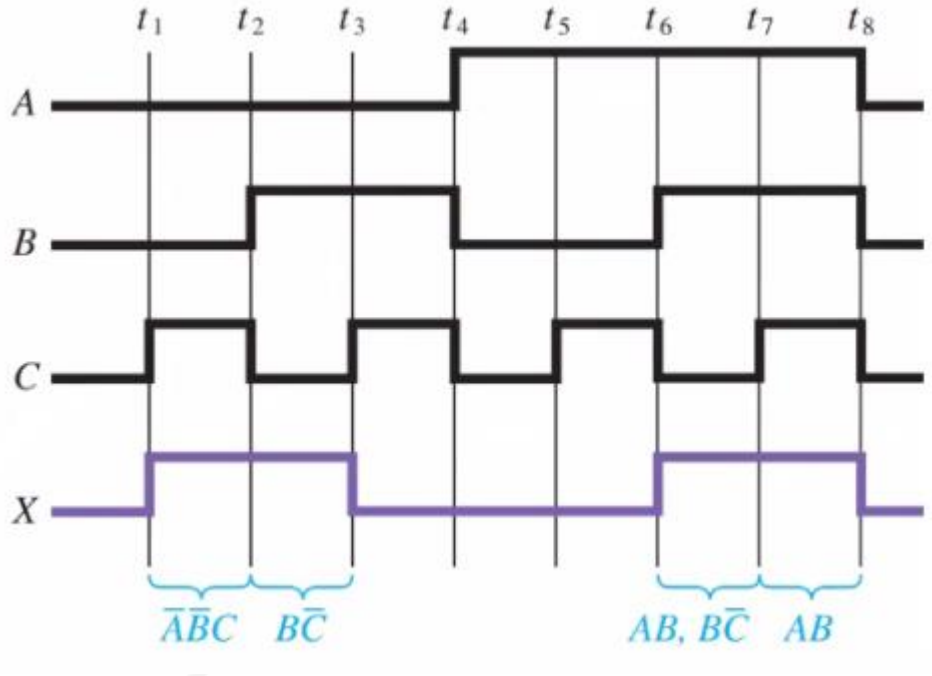
A	B	C	$X = \overline{A} + B$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

قضیه دمورگان

- تشکیل جدول درستی از روی عبارت بولی

$$X = AB + B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$$

A	B	C	X	
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\overline{A}\overline{B}C$
0	1	0	1	$B\overline{C}$
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	1	$AB, B\overline{C}$
1	1	1	1	AB

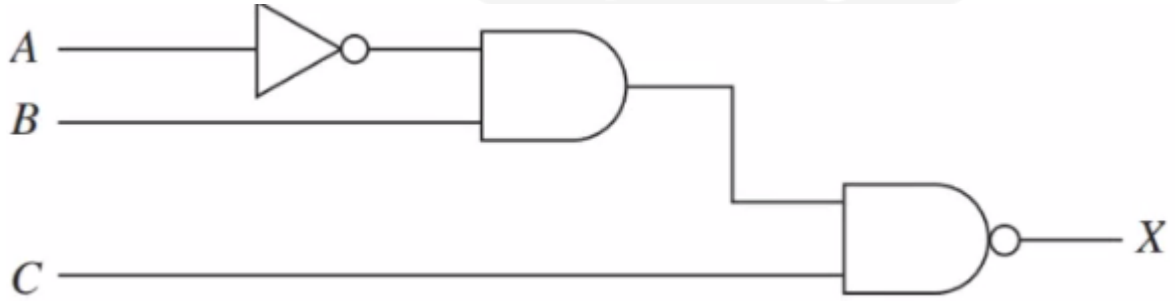


خاصیت عمومی گیت های NAND وNOR

- گیت عمومی :گیتی که با ترکیب چند عدد از آن بتوان سایر گیت ها را هم ساخت.

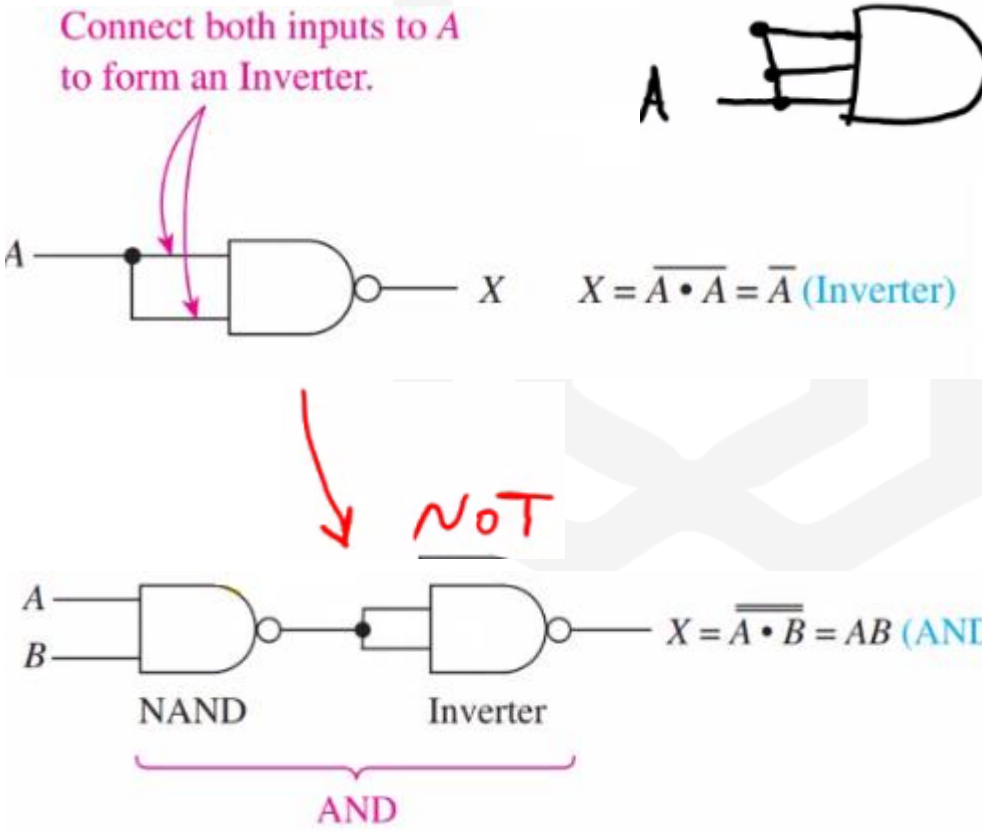
- با گیت های NANDیا NORمی توان تمام مدارات ترکیبی را پیاده سازی کرد.

- چرا به ساخت سایر گیت ها با NAND و NOR نیاز داریم؟



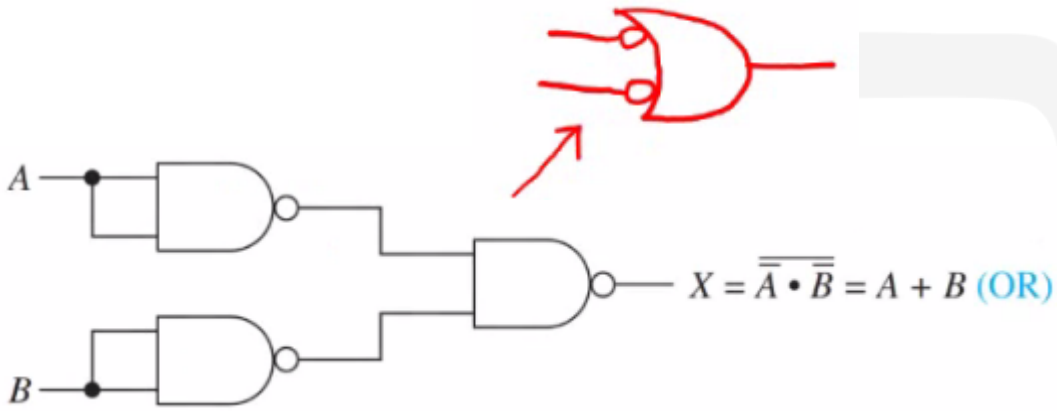
خاصیت عمومی گیت های NAND وNOR

- ساخت گیت :NOT

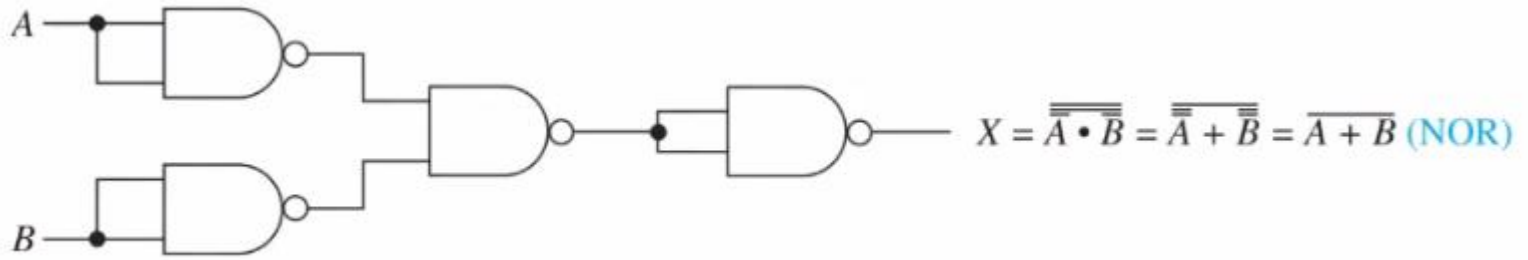


- ساخت گیت:AND

خاصیت عمومی گیت های NAND وNOR



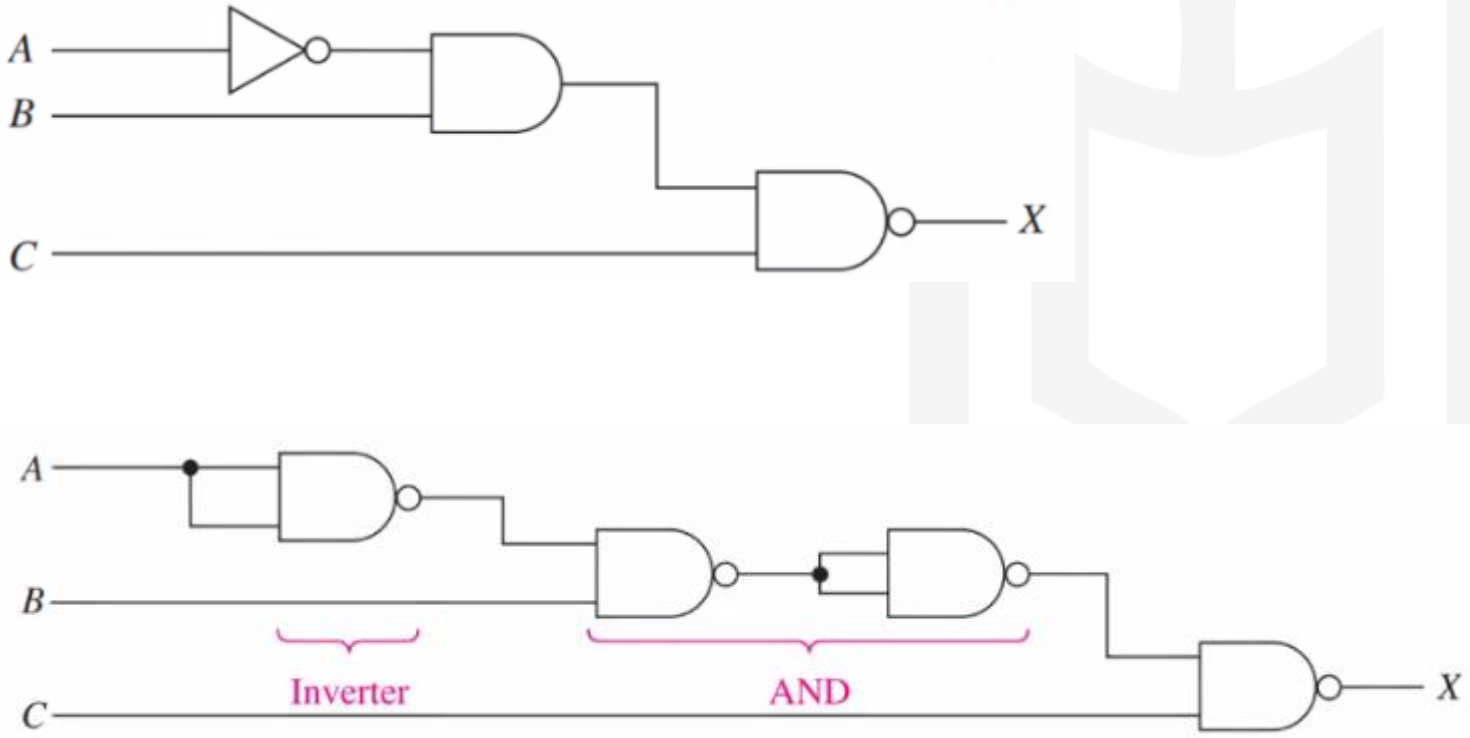
- ساخت گیت OR:

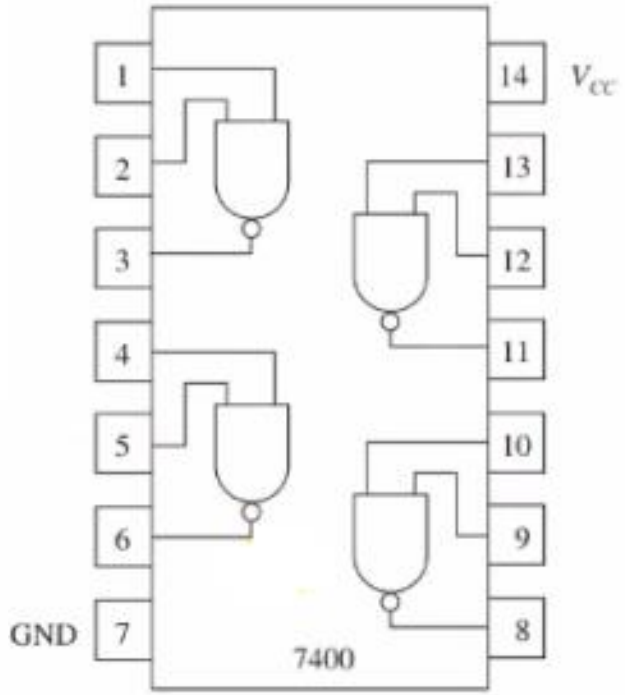


- ساخت گیت NOR:

خاصیت عمومی گیت های NAND وNOR

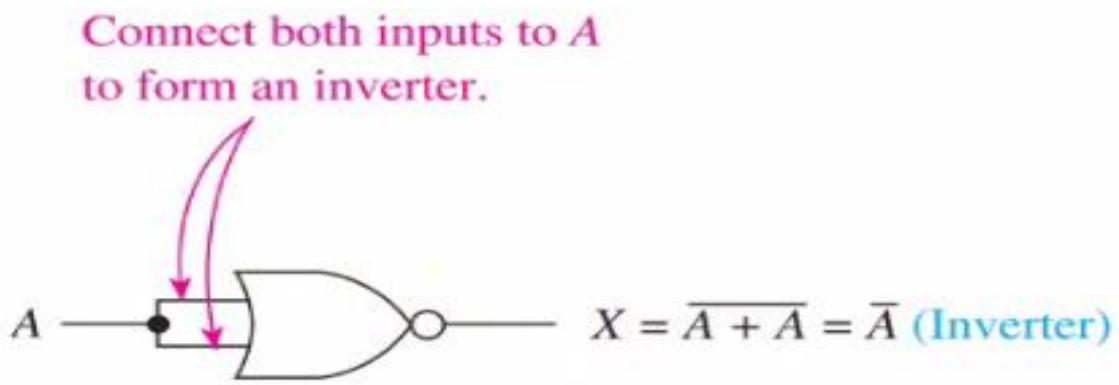
- چرا به ساخت سایر گیت ها با NAND و NOR نیاز داریم؟

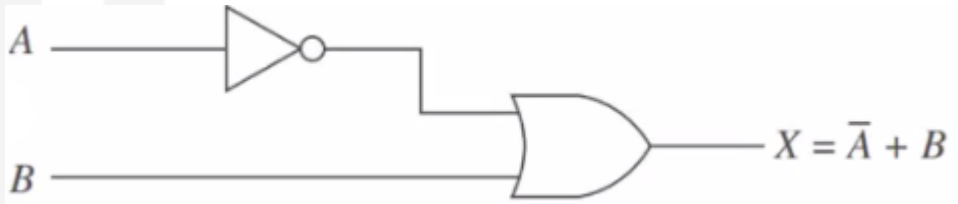


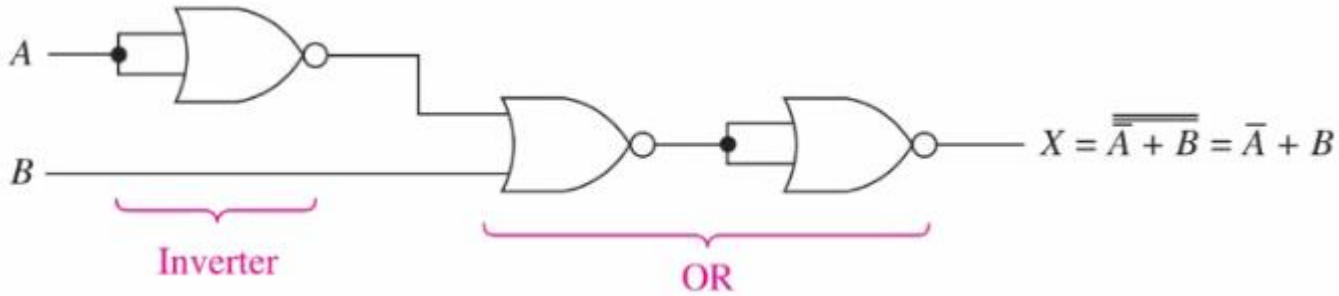


خاصیت عمومی گیت های NAND وNOR

- به صورت مشابه با گیت NOR هم می توان سایر گیت های پایه را ساخت .

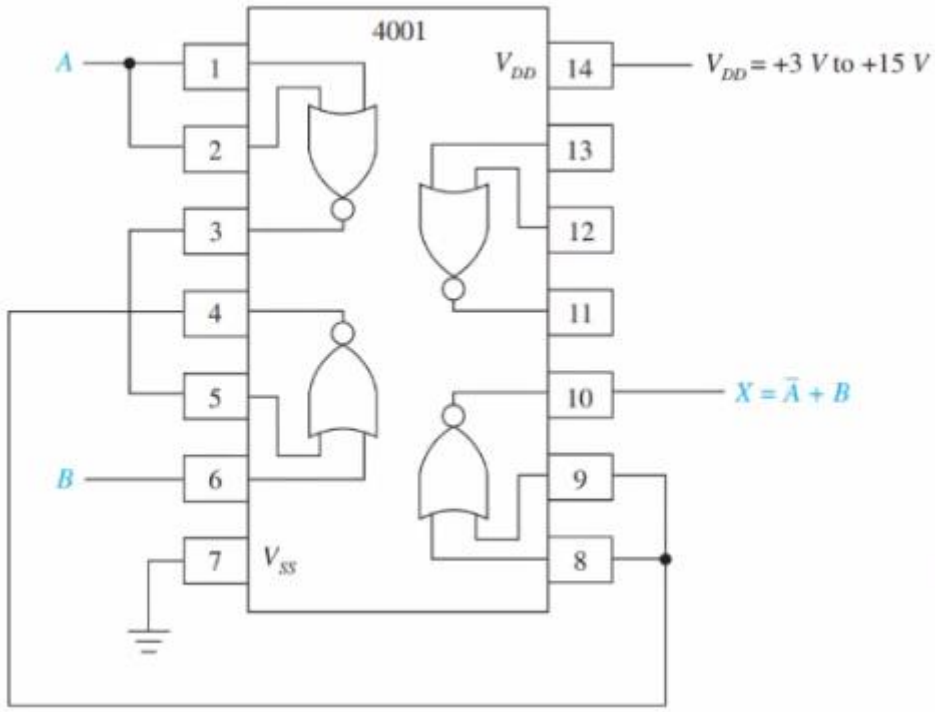


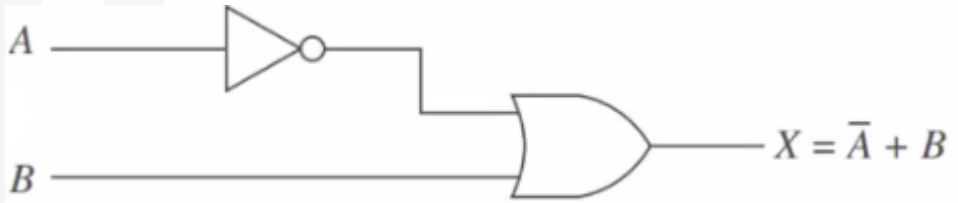




خاصیت عمومی گیت های NAND وNOR

- •به صورت مشابه با گیت NOR هم می توان سایر گیت های پایه را ساخت .

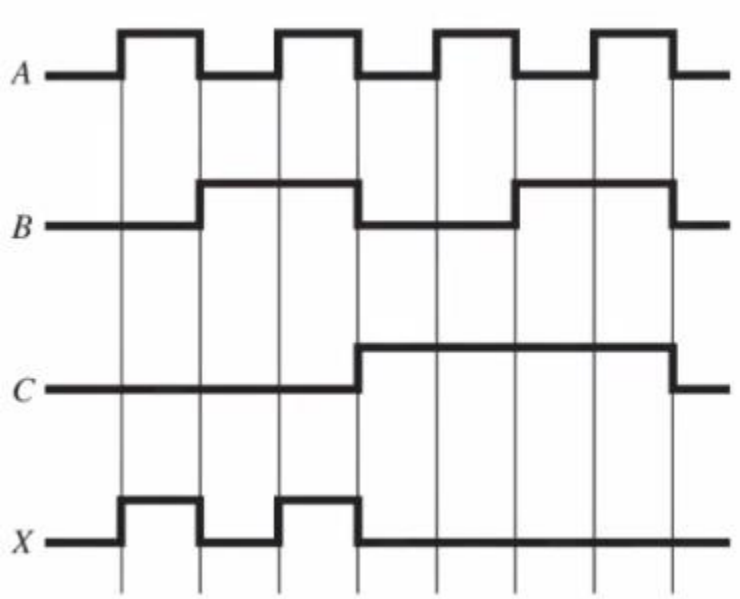




وزارت علوم، تحقیقات
دانشگاه جیرفت

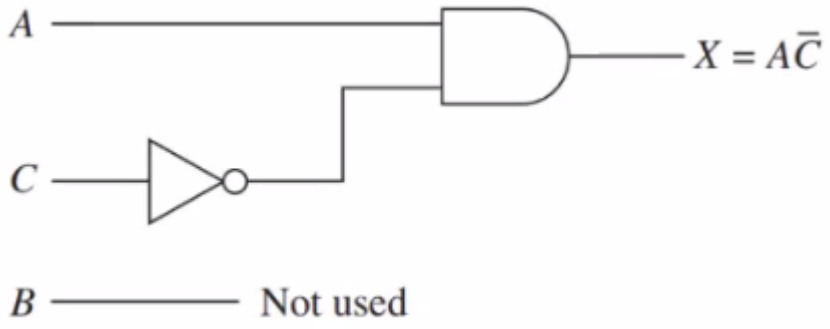
خاصیت عمومی گیت های NAND وNOR

- طراحی مدار از روش مشاهده شکل موج های ورودی و خروجی



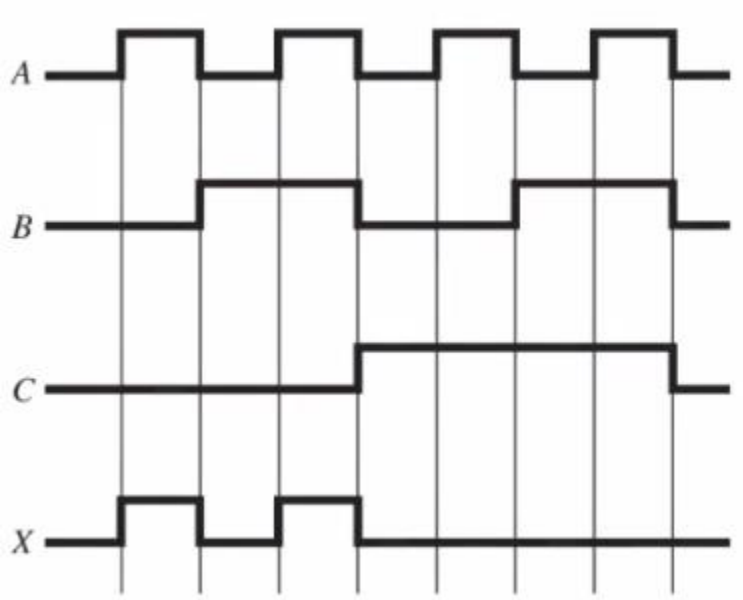
$$X = A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C}$$

$$\begin{aligned} X &= A\overline{C}\,(\overline{B} + B) \\ &= A\overline{C}(1) \\ &= A\overline{C} \quad \leftarrow \textit{simplified equation} \end{aligned}$$



خاصیت عمومی گیت های NAND وNOR

- طراحی مدار از روش مشاهده شکل موج های ورودی و خروجی



$$X = A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C}$$

$$\begin{aligned} X &= A\overline{C}\,(\overline{B} + B) \\ &= A\overline{C}(1) \\ &= A\overline{C} \quad \leftarrow \textit{simplified equation} \end{aligned}$$