



درس معادلات دیفرانسیل

مبحث :

معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه n همگن با ضرایب ثابت

بخش اول: معرفی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه n همگن با ضرایب ثابت

بخش دوم: حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه n همگن با ضرایب ثابت

معرفی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه n ، ممکن

معادله خطی همگن با ضرایب ثابت

معادله ای بصورت زیر

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$$

معادله ای خطی مرتبه n با ضرایب ثابت است. برای حل معادله ی فوق ابتدا معادله مفسر آن را بصورتی که قبلا گفته ایم می نویسیم یعنی معادله ی مفسر بصورت زیر است

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

حل معادله خطی همگن با ضرایب ثابت

همانند قبل ریشه های معادله مفسر را بدست می آوریم و با توجه به ریشه در هر حالت جواب معادله ی دیفرانسیل را می یابیم که این حالات بصورت زیر است.

حالت ۱: اگر معادله مفسر n ریشه حقیقی متمایز $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq \dots \neq r_n$ داشته باشد.

فرمول ۴

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}, \quad c_i \in \mathbb{R}$$

حل معادله خطی همگن با ضرایب ثابت

مثال

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0$$

حل: ابتدا معادله مفسر آن را می نویسیم که بصورت زیر است

$$r^3 - 2r^2 - 3r = 0$$

بنابراین داریم

$$r(r^2 - 2r - 3) = 0 \rightarrow r_1 = 0, \quad r_2 = 3, \quad r_3 = -1$$

بنابراین جواب معادله بصورت زیر است

$$y = c_1 e^0 + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-x} = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-x}$$

حل معادله خطی همگن با ضرایب ثابت

حالت ۲: اگر معادله مفسر n ریشه حقیقی داشته باشد که m تای آن مساوی باشد یعنی $r_1 = r_2 = r_3 = \dots = r_m = r$, $r_{m+1} \neq \dots \neq r_{n-1} \neq r_n$ داشته باشد.

فرمول ۴

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} + \dots + c_m x^{m-1} e^{rx} + c_{m+1} e^{r_{m+1}x} + \dots + c_n e^{r_n x}, \quad c_i \in \mathbb{R}$$

حل معادله خطی همگن با ضرایب ثابت

مثال

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید

$$y'''' - y''' = 0$$

حل: ابتدا معادله مفسر را می نویسیم.

$$r^4 - r^3 = 0 \rightarrow r^3(r - 1) = 0$$

$$\rightarrow r_1 = r_2 = r_3 = 0, r_4 = 1$$

بنابراین داریم

$$y = c_1 e^0 + c_2 x e^0 + c_3 x^2 e^0 + c_4 e^x = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^x$$

حل معادله خطی همگن با ضرایب ثابت

مثال

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 0$$

حل: ابتدا معادله مفسر می نویسیم

$$r^4 - 2r^2 + 1 = 0 \rightarrow (r^2 - 1)^2 = 0$$

$$\rightarrow (r - 1)^2 (r + 1)^2 = 0$$

$$\rightarrow r_1 = 1, r_2 = 1, r_3 = -1, r_4 = -1$$

بنابراین جواب بصورت زیر است

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x}$$

حل معادله خطی همگن با ضرایب ثابت

حالت ۳: اگر معادله مفسر هم ریشه حقیقی و هم ریشه مختلط داشته باشد. با ذکر یک مثال این حالت را توضیح می دهیم

مثال

معادله دیفرانسیل زیر را حل نمایید.

$$y''' - 4y'' + 5y' = 0$$

حل: معادله ی مفسر به صورت $r(r^2 - 4r + 5) = 0 \rightarrow r^3 - 4r^2 + 5r = 0$ است. لذا این معادله دارای ریشه های $r_1 = 0$, $r_2 = 2 + i$, $r_3 = 2 - i$ بنابراین جواب بصورت زیر است.

$$y = c_1 + e^{2x}(c_2 \cos x + c_3 \sin x)$$

حل معادله خطی همگن با ضرایب ثابت

حالت ۴: اگر معادله مفسر ریشه مختلط تکراری داشته باشد. با ذکر یک مثال این حالت را توضیح می دهیم

مثال

معادله دیفرانسیل زیر را حل نمایید. $y^{(6)} + y^{(4)} - y'' - y = 0$.
حل: ابتدا معادله مفسر را می نویسیم

$$\begin{aligned}r^6 + r^4 - r^2 - 1 &= 0 \rightarrow r^4(r^2 + 1) - (r^2 + 1) = 0 \\ \rightarrow (r^2 + 1)(r^4 - 1) &= 0 \rightarrow (r^2 + 1)(r^2 + 1)(r^2 - 1) = 0 \\ \rightarrow (r^2 + 1)^2(r - 1)(r + 1) &= 0 \\ \rightarrow r_1 = -1, r_2 = 1, r_3 = i, r_4 = -i, r_5 = i, r_6 = -i\end{aligned}$$

بنابراین جواب بصورت زیر است

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^0 (c_3 \cos x + c_4 \sin x) + x e^0 (c_5 \cos x + c_6 \sin x)$$

تمرین

جواب عمومی معادلات زیر را بیابید.

$$۱) y''' + y'' - ۲y' = ۰$$

$$۲) y'''' - ۶y''' + ۱۲y'' - ۸y = ۰$$

$$۳) y^{(۵)} + ۲y''' + y = ۰$$

- معادلات دیفرانسیل، مولف دکتر مسعود نیکوکار دانشگاه امیرکبیر

با تشکر از توجه شما