



درس معادلات دیفرانسیل

ارائه دهنده: دکتر حسن برسم

مبحث:

معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه ۲ همگن با ضرایب ثابت

بخش اول: معرفی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه ۲ همگن با ضرایب ثابت

بخش دوم: حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه ۲ همگن با ضرایب ثابت

معرفی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه ۲

معادله خطی همگن با ضرایب ثابت

معادله ای بصورت

$$ay'' + by' + cy = 0$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه ۲ همگن با ضرایب ثابت نامیده می شود. تذکر: ضرایب معادله اعدادی ثابت هستند و مرتبه معادله ۲ و معادله خطی است.

حل معادله خطی همگن با ضرایب ثابت

برای حل معادله ی

$$ay'' + by' + cy = 0$$

ابتدا $y = e^{rx}$ اختیار می نماییم و در معادله جانشین می کنیم بعبارت دیگر

$$y = e^{rx}, \quad y' = re^{rx}, \quad y'' = r^2 e^{rx}$$

تذکر: در بحث مشتق توابع نمایی داشتیم

فرمول ۱

$$(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}.$$

با جانشانی موارد بالا در معادله

$$ay'' + by' + cy = 0$$

داریم

$$a(r^2 e^{rx}) + b(re^{rx}) + ce^{rx} = 0$$

حل معادله خطی همگن با ضرایب ثابت

بنابراین

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$$

لذا داریم

$$ar^2 + br + c = 0$$

که معادله ی

۲ فرمول

$$ar^2 + br + c = 0.$$

معادله ی مفسر یا مشخصه ی معادله ی

$$ay'' + by' + cy = 0$$

نامیده می شود.

حل معادله خطی همگن با ضرایب ثابت

نحوه ی ساده تر نوشتن معادله ی مفسر:

شیوه ی قبل نحوه ی اصولی نوشتن معادله مفسر بود اما اکنون به شیوه زیر ساده تر می توان معادله ی مفسر را به کمک معادله دیفرانسیل نوشت. در واقع فرض کنید معادله ی زیر داده شده است

$$ay'' + by' + cy = 0$$

برای نوشتن معادله مفسر کافی است بجای y متغیر r و توان r متناسب با مرتبه ی مشتق y است. بنابراین معادله مفسر بصورت زیر است.

$$ar^2 + br + c = 0$$

حل معادله خطی همگن با ضرایب ثابت

اکنون با مقدمات ذکر شده جواب های معادله ی خطی مرتبه ۲ همگن را می یابیم. برای این منظور ابتدا معادله مفسر معادله دیفرانسیل به شیوه گفته شده می یابیم و سپس ریشه های معادله مفسر را به روش دلتا بدست می آوریم و به شیوه ای که در ادامه خواهیم گفت جواب ها را در هر حالت می یابیم.

توضیح مطالب بالا: معادله مفسر دارای دو ریشه است که می توان به کمک روش دلتا آنها را یافت .

تذکر: برای یافتن ریشه های معادله ی

$$ar^2 + br + c = 0$$

به شیوه زیر عمل می کنیم.

فرمول ۳

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

حل معادله خطی همگن با ضرایب ثابت

بنابراین در هر حالت جوابها را بصورت زیر بدست می آوریم.
حالت ۱: اگر معادله مفسر دو ریشه حقیقی $r_1 \neq r_2$ مختلف داشته باشد.

فرمول ۴

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

حل معادله خطی همگن با ضرایب ثابت

مثال

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید

$$y'' - y' - 6y = 0$$

حل: ابتدا معادله مفسر آن را می نویسیم که بصورت زیر است

$$r^2 - r - 6 = 0$$

و با استفاده از روش دلتا داریم

$$r_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{(-1)^2 - 4(-6)}}{2(1)} = -2, r_2 = 3$$

بنابراین جواب عمومی بصورت

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

مثال

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید

$$y'' - y' - 6y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -4$$

حل: بنابه مثال قبل معادله دارای جواب عمومی زیر است

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

اکنون بنابه شروط مساله داریم

$$y'(x) = -2c_1 e^{-2x} + 3c_2 e^{3x}$$

مثال

با اعمال شرایط اولیه داریم

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ -2c_1 + 3c_2 = -4 \end{cases}$$

با حل دستگاه فوق داریم $c_1 = \frac{13}{5}$, $c_2 = \frac{2}{5}$ ، لذا جواب معادله دیفراسیل بصورت زیر است

$$y(x) = \frac{13}{5}e^{-2x} + \frac{2}{5}e^{3x}$$

حل معادله خطی همگن با ضرایب ثابت

حالت ۲: اگر معادله مفسر دو ریشه حقیقی مساوی $r_1 = r_2 = r$ مختلف داشته باشد.

فرمول ۵

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

مثال

جواب عمومی معادله ی

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

را بیابید.

حل: معادله مفسر بصورت

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

که دارای ریشه های $r_1 = r_2 = 3$ می باشد لذا جواب عمومی معادله بصورت زیر است

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$$

حل معادله خطی همگن با ضرایب ثابت

حالت ۳: اگر معادله مفسر دارای دو ریشه مختلط $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ باشد.

فرمول ۶

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

حل معادله خطی همگن با ضرایب ثابت

مثال

جواب عمومی معادله ی

$$8y'' + 4y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

را بیابید.

حل: معادله مفسر بصورت

$$8r^2 + 4r + 1 = 0$$

که دارای ریشه های

$$r_1, r_2 = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 32}}{16} = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}i$$

می باشد لذا جواب عمومی معادله بصورت زیر است

$$y = e^{-\frac{1}{4}x} \left(c_1 \cos \frac{1}{4}x + c_2 \sin \frac{1}{4}x \right)$$

مثال

بنابه شروط مساله داریم

$$y' = -\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}\left(c_1 \cos \frac{x}{4} + c_2 \sin \frac{x}{4}\right) + \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}\left(-c_1 \sin \frac{x}{4} + c_2 \cos \frac{x}{4}\right)$$

با اعمال شرایط اولیه مساله داریم

$$\begin{cases} 0 = e^0(c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0) \\ 1 = -\frac{1}{4}e^0(0 + c_2 \sin 0) + \frac{1}{4}e^0(0 + c_2 \cos 0) \end{cases}$$

بنابراین $c_1 = 0$, $c_2 = 4$ بنا بر این جواب معادله بصورت

$$y = 4e^{-\frac{x}{4}} \sin \frac{x}{4}$$

تمرین

جواب عمومی معادلات زیر را بیابید.

$$۱) y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$۲) y'' - 6y' + 25y = 0$$

$$۳) y'' - 3y' = 0$$

$$۴) y'' + 2y' + 2y = 0$$

$$۵) y'' + y' + 2y = 0$$

تمرین

جواب معادلات زیر را با شرایط اولیه داده شده بیابید.

$$۱) y'' + ۳y' + ۲y = ۰, y(۰) = ۰, y'(۰) = ۲$$

$$۲) y'' + ۹y = ۰, y(۰) = ۲, y'(۰) = ۹$$

$$۳) y'' - ۴y' + ۴y = ۰, y(۰) = ۳, y'(۰) = -۶$$

$$۴) y'' + ۵y' + ۶y = ۰, y(۰) = ۱, y'(۰) = ۲$$

$$۵) ۴y'' + ۲۰y' + ۲۵y = ۰, y(۰) = ۱, y'(۰) = ۲$$

$$۶) y'' + ۲\pi y' + \pi^2 y = ۰, y(۱) = ۱, y'(۱) = \frac{1}{\pi}$$

- معادلات دیفرانسیل، مولف دکتر مسعود نیکوکار دانشگاه امیرکبیر

با تشکر از توجه شما