استخراج تابع تقاضای جبرانی

این تابع از به حداقل رساندن مخارج مصرف‌کننده، در سطح معین و ثابتی از مطلوبیت بدست می‌آید:

$$\left.\begin{aligned}&\min\ c = p_1x_1 + p_2x_2\\ &s.t:\ \ \bar{u} = f(x_1, x_2)\end{aligned}\right\} \Rightarrow x_i^{C.D} = x_i^{C.D}(\vec{p}, \bar{u})$$

مثال ۱۸: اگر تابع مطلوبیت مصرف‌کننده به صورت $u = q_1q_2$ باشد، توابع تقاضای جبران شده مصرف‌کننده را بدست آورید.

پاسخ: برای این منظور باید مخارج مصرف‌کننده را با ثابت در نظر گرفتن مطلوبیتش حداقل کنیم.

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}&\min\ \ c = p_1q_1 + p_2q_2\\ &s.t: \qquad \bar{u} = q_1q_2\end{aligned} \Rightarrow L = p_1q_1 + p_2q_2 + \mu\left[\bar{u} - q_1q_2\right]$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial q_1} = p_1 - \mu q_2 = 0\\ &\frac{\partial L}{\partial q_2} = p_2 - \mu q_1 = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_2}{q_1} \Rightarrow q_2 = \frac{p_1q_1}{p_2} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = \bar{u} - q_1q_2 = 0 \qquad (2)$$

از معادلات ۱ و ۲ نتیجه گرفته می‌شود که:

$$\bar{u} - q_1\left(\frac{p_1q_1}{p_2}\right) = 0 \Rightarrow \bar{u} = \frac{p_1}{p_2}q_1^2 \Rightarrow q_1 = \sqrt{\frac{p_2\bar{u}}{p_1}}$$

به همین ترتیب معادله تابع تقاضای جبرانی کالای q_2 به صورت $q_2 = \sqrt{\frac{p_1\bar{u}}{p_2}}$ خواهد بود.

۵-۱- ویژگیهای تابع تقاضای جبرانی

توابع تقاضای جبرانی دارای ویژگیهای زیر می‌باشند:

الف) تابع تقاضای جبرانی نسبت به سطح قیمتها همگن از درجه صفر می‌باشد.

نکته: با توجه به ویژگی بالا و با استفاده از فرضیه اولر در مورد توابع همگن می‌توان رابطه زیر را در مورد کششهای قیمتی تابع تقاضای جبرانی نتیجه گرفت:

$$x_i^{C.D} = x_i^{C.D}\left(p_1, p_2, \dots, p_n, \bar{u}\right) \Rightarrow p_1\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_1}\right)_{\bar{u}} + p_2\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_2}\right)_{\bar{u}} + \dots + p_n\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_n}\right)_{\bar{u}} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{p_1}{x_i}\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_1}\right)_{\bar{u}} + \frac{p_2}{x_i}\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_2}\right)_{\bar{u}} + \dots + \frac{p_n}{x_i}\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_n}\right)_{\bar{u}} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{i1}^* + \varepsilon_{i2}^* + \dots + \varepsilon_{in}^* = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij}^* = 0$$

رابطه بالا بیان می‌کند که در تابع تقاضای جبران شده، جمع کششهای قیمتی خودی و متقاطع برابر صفر می‌باشد.

توجه: برای نشان دادن کششهای قیمتی تابع تقاضای جبرانی از نماد ε_{ij}^* استفاده کرده‌ایم. و نماد $\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{\bar{u}}$ اثر تغییر قیمت کالای x_j بر روی تابع تقاضای جبرانی کالای x_i را نشان می‌دهد و اندیس $\bar{u}$ بیانگر این است که سطح مطلوبیت ثابت است و یعنی اینکه ما در حال بحث کردن بر روی تابع تقاضای جبرانی هستیم.

ب) وقتی که قیمت یکی از کالاها در حال تغییر است، جمع وزنی کششهای قیمتی توابع تقاضای جبرانی کالاها برابر صفر خواهد بود. (توجه: وزنها برابر سهم هر کالا در بودجه فرد، می‌باشند.)

$$\left.\begin{aligned} \bar{u} &= f\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) \\ f_i &= \frac{p_i}{\mu} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i = 0 \Rightarrow \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n} P_i dx_i = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_i\left(\frac{dx_i}{dp_j}\right)_{\bar{u}} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i x_i}{m} \cdot \frac{p_j}{x_i}\left(\frac{dx_i}{dp_j}\right)_{\bar{u}} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} v_i \varepsilon_{ij}^* = 0$$

$$v_i = \frac{p_i x_i}{m} \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} v_i = 1$$

مثال ۱۹: الف) برای بررسی ویژگی الف به عنوان مثال اگر تابع تقاضای جبرانی کالای x_1 را به صورت $x_1^{C.D} = \sqrt{\frac{p_2 \bar{u}}{p_1}}$ داشته باشیم، خواهیم داشت:

$$x_1^{C.D} = p_2^{\frac{1}{2}} \left(\bar{u}\right)^{\frac{1}{2}} p_1^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \varepsilon_{11}^* = -\frac{1}{2}, \ \varepsilon_{12}^* = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij}^* \Rightarrow \sum_{j=1}^{2} \varepsilon_{1j}^* = \varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{12}^* = \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 0$$

ب) برای بررسی ویژگی ب، به عنوان مثال اگر توابع تقاضای جبران شده کالاهای x_1 و x_2 به صورت $x_1^{C.D} = \sqrt{\frac{p_2 \bar{u}}{p_1}}$ ، $x_2^{C.D} = \sqrt{\frac{p_1 \bar{u}}{p_2}}$ باشند، داریم:

$$\varepsilon_{12}^* = +\frac{1}{2}\ ,\ \varepsilon_{22}^* = -\frac{1}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \nu_i \varepsilon_{ij}^* \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \nu_i \varepsilon_{i2}^* = \nu_1 \varepsilon_{12}^* + \nu_2 \varepsilon_{22}^* = \frac{1}{2}(\nu_1) - \frac{1}{2}(\nu_2) = \frac{1}{2}(\nu_1 - \nu_2) = 0$$

زیرا که ν_1 و ν_2 در این مثال با هم برابرند:

$$\nu_1 = \frac{p_1 x_1}{m} = \frac{1}{m}\sqrt{p_1 p_2 \bar{u}}$$
$$\nu_2 = \frac{p_2 x_2}{m} = \frac{1}{m}\sqrt{p_1 p_2 \bar{u}} \Rightarrow \nu_1 = \nu_2$$

بنابراین برقراری ویژگی ب نیز در این مثال نشان داده شد.

ج) در رسم منحنی تقاضای معمولی (N.D) درآمد اسمی ثابت است در حالیکه در رسم منحنی تقاضای جبرانی (C.D) سطح مطلوبیت و درآمد حقیقی ثابت است.

۶ـ تابع مخارج (هزینه) مصرف‌کننده

بر حداقل هزینه پولی که با آن می‌توان در قیمتهای داده شده، مقدار مطلوبیت معینی را بدست آورد، دلالت دارد.

$$c = c(\bar{p}, \bar{u})$$

برای استخراج تابع مخارج (هزینه) مصرف‌کننده، می‌توان از دو روش زیر استفاده کرد:

روش اول: اگر تابع مطلوبیت غیر مستقیم را در دست داشته باشیم، می‌توانیم با معکوس کردن این تابع و محاسبه درآمد بر حسب سایر متغیرها، به معادله تابع مخارج دست یابیم.

مثال ۲۰: اگر تابع مطلوبیت مصرف‌کننده به صورت $u = x_1 x_2$ باشد، تابع مخارج مصرف‌کننده را بدست آورید.

ج) با معکوس کردن تابع مطلوبیت غیرمستقیم می‌توان تابع مخارج مصرف‌کننده (تابع هزینه غیرمستقیم) را بدست آورد:

$$u = \frac{m}{\left(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2}\right)^2} \Rightarrow m = c = u\left(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2}\right)^2$$

د) برای بدست آوردن تابع تقاضای جبرانی از قضیه شفارد استفاده می‌کنیم:

$$x_1^{C.D} = \frac{\partial C}{\partial p_1} = 2\left(\frac{1}{2\sqrt{p_1}}\right)\left(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2}\right)u = \left(1 + \sqrt{\frac{p_2}{p_1}}\right)u$$

$$x_2^{C.D} = \frac{\partial C}{\partial p_2} = 2\left(\frac{1}{2\sqrt{p_2}}\right)\left(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2}\right)u = \left(1 + \sqrt{\frac{p_1}{p_2}}\right)u$$

تمرین: اگر تابع تقاضای جبرانی کالای x_1 به صورت زیر باشد، تابع هزینه و تابع مطلوبیت غیر مستقیم مصرف کننده را بدست آورید.

$$x_1^{C.D} = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}}\,\bar{u}$$

۸- اثرات جانشینی و درآمدی و استخراج معادله اسلاتسکی[1]

اقتصاد دانان اثر تغییر قیمت بر مقدار تقاضای کالای x_i را به دو اثر جانشینی[2] و اثر درآمدی[3] تفکیک کرده‌اند.

الف) اثر جانشینی: به عنوان مثال فرض کنید که قیمت کالای x_i، کاهش یابد در این صورت اثر جانشینی بیان می‌کند که مصرف‌کننده سعی می‌کند با حفظ سطح مطلوبیت قبلی خود، کالای x_i را که ارزانتر شده است، جایگزین کالاهای دیگر نماید، به این اثر ناشی از تغییر قیمت کالا، اثر جانشینی گویند.

ب) اثر درآمدی: اگر بر فرض قیمت کالای x_i کاهش پیدا کند، در این صورت قدرت خرید مصرف‌کننده افزایش پیدا خواهد کرد و تحت شرایطی که کالای x_i یک کالای نرمال باشد، افزایش قدرت خرید مصرف‌کننده، باعث افزایش تقاضای مصرف‌کننده از کالای x_i می‌گردد. لازم به ذکر است در صورتی که کالای x_i یک کالای پست باشد، با افزایش قدرت خرید مصرف‌کننده، تقاضا برای کالای x_i کاهش پیدا خواهد کرد. این اثر تغییر قیمت بر روی تقاضای کالای x_i را اثر درآمدی گویند.

---

1 - Slutsky equation
2 - Substitution effect
3 - Income effect

* به جمع دو اثر درآمدی و جانشینی، اثر کل (اثر ناخالص[1]) ناشی از تغییر قیمت گفته می‌شود.
توجه: اگر قیمت کالای x_i افزایش یافته باشد، باز به همان ترتیب ذکر شده می‌توان اثر کل را به اثرات جانشینی و درآمدی تفکیک کرد.

چند نکته در مورد علامتهای اثرات جانشینی و درآمدی

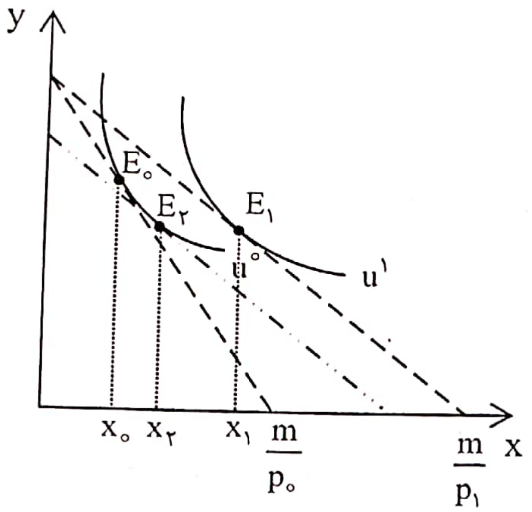
در مورد اثرات جانشینی و درآمدی باید نکات زیر را مورد توجه قرار داد:
۱- اثر جانشینی همواره منفی است، بدین معنی که اگر ما فقط اثر جانشینی را در نظر داشته باشیم با افزایش قیمت، مقدار تقاضا کاهش یافته و با کاهش قیمت مقدار تقاضا افزایش می‌یابد.
۲- اگر کالا نرمال باشد، در این صورت علامت اثر جانشینی و درآمدی یکسان می‌باشند و بنابراین بطور یقین علامت اثر کل نیز منفی خواهد بود و شیب تابع تقاضا، نزولی خواهد شد.
۳- اگر کالا پست باشد، در این صورت علامت اثر جانشینی و درآمدی مخالف هم می‌باشند، ولی در مورد علامت اثر کل به صورت زیر می‌توان اظهار نظر کرد:
الف) اگر قدر مطلق اثر جانشینی بزرگتر از اثر درآمدی باشد، در این صورت اثر جانشینی منفی بر اثر درآمدی مثبت غالب شده و علامت اثر کل نیز منفی خواهد بود و در نتیجه منحنی تقاضا نیز شیب نزولی خود را حفظ خواهد کرد.
ب) اگر قدرمطلق اثر جانشینی کوچکتر از اثر درآمدی باشد، تحت این شرایط اثر درآمدی مثبت بر اثر جانشینی منفی غالب شده و علامت اثر کل مثبت شده و در نتیجه منحنی تقاضا شیب مثبت پیدا خواهد کرد. به چنین کالای پستی که منحنی تقاضای آن صعودی است، اصطلاحاً «کالای گیفن»[2] می‌گویند.
ج) اگر قدر مطلق اثر جانشینی با اثر درآمدی برابر باشد، تحت این شرایط اثر درآمدی، اثر جانشینی را خنثی نموده و منحنی تقاضا عمودی و کاملاً بی‌کشش[3] خواهد شد.

۸-۱- تفکیک اثر جانشینی و اثر درآمدی با استفاده از نمودار

همانند نمودار زیر فرض می‌کنیم که نقطه تعادل اولیه مصرف‌کننده نقطه E_0 بر روی منحنی بی‌تفاوتی u_0 باشد.
حال فرض می‌کنیم که قیمت کالای x، از p_0 به p_1 کاهش یابد، در این صورت خط بودجه به سمت بیرون چرخش پیدا خواهد کرد و مصرف‌کننده در نقطه E_1 و بر روی منحنی بی‌تفاوتی

1 - Gross effect
2 - Giffen good
3 - Perfectly inelastic

u_1 به تعادل خواهد رسید. تحت این شرایط فاصله x_0 تا x_1، اثر کل ناشی از تغییر قیمت بر روی تقاضای کالای x را نشان می‌دهد.



حال برای تفکیک اثرات جانشینی و درآمدی باید خط بودجه‌ای به موازات خط بودجه جدید و مماس بر منحنی بی‌تفاوتی اولیه رسم کنیم، این خط در نقطه E_2 بر منحنی بی‌تفاوتی اولیه مماس خواهد بود. تحت این شرایط فاصله x_0 تا x_2 اثر جانشینی ناشی از تغییر قیمت و فاصله x_2 تا x_1، اثر درآمدی ناشی از تغییر قیمت را نشان می‌دهند.

x_0x_1: اثر کل

x_0x_2: اثر جانشینی

x_2x_1: اثر درآمدی

مثال ۲۹: فرض کنید که تابع مطلوبیت مصرف‌کننده به صورت $u = 10x_1x_2$ بوده و $m = 100$ و $p_2 = 2$ باشند. حال اگر قیمت کالای x_1 از یک به نیم کاهش پیدا کند، اثرات کل، جانشینی و درآمدی ناشی از این تغییر را بر روی مقدار تقاضای کالای x_1 تعیین کنید.

حل: روش اول: مقادیر مصرف اولیه مصرف‌کننده از کالاها و نیز سطح مطلوبیت اولیه مصرف‌کننده به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = 1 \\ p_2 = 2 \\ m = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{10x_2}{10x_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = 2x_2$$

$$100 = x_1 + 2x_2 \Rightarrow 100 = 2x_2 + 2x_2 \Rightarrow x_2 = 25, x_1 = 50$$

$$u^\circ = 12500$$

با تغییر قیمت کالای x_1، مقدار مصرف کالاها و نیز سطح مطلوبیت مصرف‌کننده به‌صورت زیر خواهند شد:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = 0/5 \\ p_2 = 2 \\ m = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{10x_2}{10x_1} = \frac{0/5}{2} \Rightarrow x_1 = 4x_2$$

$$100 = 0/5x_1 + 2x_2 \Rightarrow 100 = 2x_2 + 2x_2 \Rightarrow x_2 = 25, x_1 = 100, u^\circ = 25000$$

با کاهش قیمت کالای x_1، تقاضای این کالا به میزان ۵۰ واحد افزایش یافته است، بنابراین اثر کل ناشی از تغییر قیمت برابر با ۵۰ واحد است. حال برای تفکیک اثر کل به اثر جانشینی و درآمدی در قیمتهای جدید سطح مطلوبیت را ثابت در نظر می‌گیریم:

$$\begin{array}{l} \dfrac{f_1}{f_2} = \dfrac{p_1}{p_2} \\ u = 10x_1x_2 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{10x_2}{10x_1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{2} \Rightarrow x_2 = \dfrac{1}{4}x_1 \\ 12500 = 10x_1x_2 \Rightarrow 12500 = \dfrac{10}{4}x_1^2 \Rightarrow x_1^2 = 5000 \Rightarrow x_1 = \sqrt{5000} = 70/71 \end{cases}$$

بنابراین اثر جانشینی ناشی از تغییر قیمت برابر خواهد بود با $70/71 - 50 = 20/71$ و اثر درآمدی ناشی از تغییر قیمت نیز برابر خواهد بود با: $100 - 70/71 = 29/29$

روش دوم: می‌دانیم که منحنی تقاضای معمولی اثر کل ناشی از تغییر قیمت و منحنی تقاضای جبرانی نیز اثر جانشینی ناشی از تغییر قیمت را نشان می‌دهند بنابراین برای بدست آوردن مقادیر هر یک از این اثرات کافی است که معادلات تقاضای معمولی و تقاضای جبرانی کالای x_1 را داشته باشیم.

$$x_1^{N.D} = \frac{m}{2p_1} = \frac{100}{2p_1} \begin{array}{l} \nearrow x_1^\circ = \dfrac{100}{2(1)} = 50 \\ \searrow x_1^1 = \dfrac{100}{2\left(\frac{1}{2}\right)} = 100 \end{array} \Rightarrow \text{اثر کل} = 100 - 50 = 50$$

$$x_2^{N.D} = \frac{m}{2p_2} = \frac{100}{2(2)} = 25 \qquad u^\circ = 10(25)(50) = 12500$$

Scanned by CamScanner

برای بدست آوردن تابع تقاضای جبرانی داریم:

$$\begin{matrix} \min & C = p_1x_1 + p_2x_2 \\ s.t: & \bar{u} = 10x_1x_2 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{f_1}{f_2} = \dfrac{p_1}{p_2} \Rightarrow \dfrac{10x_2}{10x_1} = \dfrac{p_1}{p_2} \Rightarrow x_2 = \dfrac{p_1}{p_2}x_1 \\ \bar{u} = 10x_1x_2 \Rightarrow \bar{u} = 10\left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)x_1^2 \end{cases}$$

$$x_1^{C.D} = \sqrt{\frac{\bar{u}}{10}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)} \begin{cases} x_1^{\circ} = \sqrt{\left(\dfrac{12500}{10}\right)\left(\dfrac{2}{1}\right)} = 50 \\ x_1^{1} = \sqrt{\left(\dfrac{12500}{10}\right)\left(\dfrac{2}{0/5}\right)} = 50\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \text{اثر جانشینی} = 50\sqrt{2} - 50 = 20/71$$

تمرین: فرض کنید که تابع مطلوبیت مصرف‌کننده‌ای به شکل زیر می‌باشد:

$$u = \ln x + y$$

الف) اگر قیمت هر یک از کالاها برابر واحد بوده و درآمد مصرف‌کننده نیز برابر با ۵۰۰۰ تومان در ماه باشد، تابع تقاضای وی را برای کالای x استخراج نمائید.

ب) فرض کنید قیمت عرضه کالای x برابر با یک تومان به‌ازای هر واحد باشد، حال اگر قیمت به ۱/۲۵ افزایش یابد، اثر جانشینی و درآمدی این تغییر قیمت را محاسبه نمائید.

ج) کالای x چه نوع کالایی است؟

۸-۲- تفکیک اثرات جانشینی و درآمدی با استفاده از رابطه اسلاتسکی

برای درک اهمیت تأثیرات تغییر قیمت و درآمد بر روی خرید مصرف‌کننده، فرض کنیم که تمام متغیرها بطور همزمان تغییر کنند، در این صورت اگر از شرایط مرتبه اول لازم برای حداکثرسازی مقید تابع مطلوبیت $u = f(x_1, x_2)$، مجدداً دیفرانسل‌گیری کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{matrix} f_1 - \hat{\lambda}p_1 = 0 \\ f_2 - \hat{\lambda}p_2 = 0 \\ m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} f_{11}dx_1 + f_{12}dx_2 - p_1d\hat{\lambda} = \hat{\lambda}dp_1 \\ f_{21}dx_1 + f_{22}dx_2 - p_2d\hat{\lambda} = \hat{\lambda}dp_2 \\ -p_1dx_1 - p_2dx_2 = -dm + x_1dp_1 + x_2dp_2 \end{cases}$$

در دستگاه سه معادله و سه مجهولی به دست آمده، هر یک از مجهولهای dx_1، dx_2 و $d\lambda$ را با استفاده از دستور کرامر[1] می‌توان محاسبه نمود، بدین ترتیب برای dx_1 خواهیم داشت:

$$dx_1 = \frac{\begin{vmatrix} \lambda dp_1 & f_{12} & -p_1 \\ \lambda dp_2 & f_{22} & -p_2 \\ -dm + x_1dp_1 + x_2dp_2 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}} \qquad (*)$$

با بسط دادن دترمینان صورت کسر فوق می‌توان نوشت:

$$\Rightarrow dx_1 = \lambda dp_1 \frac{D_{11}}{D} + \lambda dp_2 \frac{D_{21}}{D} + (-dm + x_1dp_1 + x_2dp_2)\frac{D_{31}}{D} \qquad (**)$$

که در آن D برابر با دترمینان مخرج کسر (*) بوده و D_{11}، D_{21} و D_{31} همسازه‌های[2] این دترمینان هستند.

الف) اثر مستقیم تغییر قیمت کالا بر روی تقاضای کالا

با ثابت فرض کردن درآمد مصرف‌کننده و نیز قیمت کالای دوم معادله اسلاتسکی برای نشان دادن اثر تغییر قیمت کالای x_1 بر روی تقاضای آن را به صورت زیر می‌توان بدست آورد:

$$\text{if} \qquad dp_2 = dm = 0 \Rightarrow \frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{\lambda D_{11}}{D} + x_1 \frac{D_{31}}{D}$$

که در آن:

$$D = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} = 2f_{12}p_1p_2 - f_{11}p_2^2 - f_{22}p_1^2 > 0$$

$$D_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} f_{22} & -p_2 \\ -p_2 & 0 \end{vmatrix} = -p_2^2 < 0 \quad , \quad D_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} f_{12} & -p_1 \\ f_{22} & -p_2 \end{vmatrix} = -p_2f_{12} + p_1f_{22}$$

از طرف دیگر اگر قیمت کالاها را ثابت در نظر بگیریم در این صورت اثر تغییر درآمد بر روی تقاضای x_1 برابر خواهد بود با:

$$\text{if} \qquad dp_1 = dp_2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial x_1}{\partial m} = -\frac{D_{31}}{D}$$

---

1 - Cramer's rule
2 - Cofactors

با تغییر در قیمت کالا میزان مطلوبیت مصرف‌کننده تغییر پیدا خواهد کرد، اگر تغییر در قیمت از طریق تغییر درآمد به گونه‌ای جبران گردد که سطح رضایت خاطر مصرف‌کننده بدون تغییر بماند در این صورت بر روی منحنی تقاضای جبرانی قرار گرفته و خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} du = 0 \Rightarrow f_1dx_1 + f_2dx_2 = 0 \\ \dfrac{f_1}{f_2} = \dfrac{p_1}{p_2} \end{array}\right\} \Rightarrow p_1dx_1 + p_2dx_2 = 0$$

و بنابراین با توجه به معادله سوم دستگاه و نیز با توجه به رابطه (**) خواهیم داشت:

$$-dm + x_1dp_1 + x_2dp_2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_{\bar{u}} = \frac{\lambda D_{11}}{D}$$

و بدین ترتیب با توجه به توضیحات ارائه شده رابطه اسلاتسکی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_{\bar{u}} - x_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial m}\right)$$

نکته:

۱- رابطه اسلاتسکی را براساس فرمول کششها، به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\cdot\frac{p_1}{x_1} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_{\bar{u}}\cdot\frac{p_1}{x_1} - \frac{p_1x_1}{m}\left(\frac{\partial x_1}{\partial m}\right)\cdot\frac{m}{x_1} \Rightarrow \varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^* - v_1\eta_{1m} \quad \text{و} \quad v_1 = \frac{p_1x_1}{m}$$

که در آن:

ε_{11}: کشش قیمتی خودی تقاضای معمولی کالای x_1.

ε_{11}^*: کشش قیمتی خودی تقاضای جبرانی کالای x_1.

η_{1m}: کشش درآمدی کالای x_1.

۲- در رابطه اسلاتسکی، $\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)$ نشان دهنده اثر کل و $\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_{\bar{u}} = \frac{\lambda D_{11}}{D}$ بیانگر اثر جانشینی و $-x_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial m}\right) = x_1\frac{D_{31}}{D}$ نشان‌دهنده اثر درآمدی می‌باشند.

توجه: به طور کلی در مورد تقاضای کالای x_i، روابط زیر را می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_i} = \frac{\lambda D_{ii}}{D} + x_i\frac{D_{3i}}{D} \quad \text{یا} \quad \frac{\partial x_i}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial p_i}\right)_{\bar{u}} - x_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial m}\right) \quad \text{و یا} \quad \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{ii}^* - v_i\eta_{im}$$

۳- اثر جانشینی همواره منفی است زیرا:

$$\text{اثر جانشینی}=\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_{\bar{u}}=\frac{\lambda D_{11}}{D}=\frac{-\lambda p_2^2}{D}<0$$

صورت این کسر منفی بوده و مخرج این کسر نیز برابر $D=2f_{12}f_1f_2-f_{11}f_2^2-f_{22}f_1^2$ می‌باشد که با توجه به شبه مقعر اکید بودن تابع مطلوبیت مقدار آن مثبت است. بنابراین کل کسر منفی خواهد بود.

مثال ۳۰: فرض کنید که کشش قیمتی تقاضای معمولی برای یک کالا برابر ۱- است کشش درآمدی آن ۲ و سهم درآمدی آن کالا در مخارج کل برابر $\frac{1}{4}$ است. کشش قیمتی جبرانی آن را محاسبه کنید.

حل:

$$\varepsilon_{ii}=\varepsilon_{ii}^*-v_i\eta_{im}\Rightarrow -1=\varepsilon_{ii}^*-\left(\frac{1}{4}\right)(2)\Rightarrow \varepsilon_{ii}^*=-\frac{1}{2}$$

مثال ۳۱: اگر تابع مطلوبیت مصرف‌کننده بصورت $u=q_1q_2$ باشد، الف) معادله اسلاتسکی را برای کالای q_1 وقتی که قیمت آن تغییر پیدا می‌کند، بنویسید. ب) با فرض اینکه $p_1=2$ و $p_2=5$ و $m=100$ باشد، مقادیر اثرات جانشینی، درآمدی و کل ناشی از تغییر قیمت کالای q_1 را بدست آورید.

حل: الف) رابطه اسلاتسکی را به صورت زیر داریم:

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1}=\frac{\lambda D_{11}}{D}+q_1\frac{D_{31}}{D}$$

$$D=\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -p_1\\ f_{21} & f_{22} & -p_2\\ -p_1 & -p_2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -p_1\\ 1 & 0 & -p_2\\ -p_1 & -p_2 & 0\end{vmatrix}=2p_1p_2$$

$$D_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -p_2\\ -p_2 & 0\end{vmatrix}=-p_2^2 \qquad D_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -p_1\\ 0 & -p_2\end{vmatrix}=-p_2$$

$$\lambda=\frac{f_1}{p_1}=\frac{q_2}{p_1}=\frac{\frac{m}{2p_2}}{p_1}=\frac{m}{2p_1p_2}$$

$$q_2=\frac{m}{2p_2}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial q_1}{\partial p_1}=\left(\frac{m}{2p_1p_2}\right)\left(\frac{-p_2^2}{2p_1p_2}\right)+\left(\frac{m}{2p_1}\right)\left(\frac{-p_2}{2p_1p_2}\right)=\left(\frac{-m}{4p_1^2}\right)+\left(\frac{-m}{4p_1^2}\right)=\frac{-m}{2p_1^2}$$

مثال ۳۶: نشان دهید که در سبد مصرفی مصرف کننده، همه کالاها نمی‌توانند مکمل هیکس-آلن کالای نمونه‌ای x_i باشند.

حل: با توجه به رابطه $\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij}^{*} = 0$ می توان نوشت:

$$\varepsilon_{i1}^{*} + \varepsilon_{i2}^{*} + \ldots + \varepsilon_{ii}^{*} + \ldots + \varepsilon_{in}^{*} = 0$$

با توجه به اینکه اثر جانشینی ناشی از تغییر قیمت یک کالا بر روی تقاضای آن کالا منفی است بنابراین $\varepsilon_{ii}^{*} < 0$ بوده و برای اینکه مجموع بالا برابر با صفر باشد باید حداقل مقدار یکی از کششهای متقاطع مثبت باشد و یا به عبارت دیگر باید حداقل یک جانشین هیکس-آلن برای کالای i وجود داشته باشد.

۹- روابط بین توابع تقاضای معمولی و جبران شده و توابع مطلوبیت مستقیم و غیرمستقیم و تابع مخارج

نکته: اگر در تابع مطلوبیت غیر مستقیم $u = u(\vec{p}, m)$، به جای مقدار درآمد، تابع مخارج مصرف‌کننده را قرار دهیم، تابع مطلوبیت مستقیم بدست می‌آید.

مثال ۳۷: می‌دانیم که اگر تابع مطلوبیت مستقیم به صورت $u = x_1 x_2$ باشد در این صورت خواهیم داشت:

تابع مخارج مصرف‌کننده $c = 2\sqrt{p_1 p_2 \bar{u}}$ تابع مطلوبیت غیر مستقیم $v = \dfrac{m^2}{4p_1p_2}$

حال اگر تابع مخارج را به‌جای m در تابع مطلوبیت غیر مستقیم جاگذاری کنیم خواهیم داشت:

$$v = \frac{m^2}{4p_1p_2} \Rightarrow \frac{\left(2\sqrt{p_1p_2\bar{u}}\right)^2}{4p_1p_2} = \frac{4p_1p_2u}{4p_1p_2} = u \rightarrow$$ مطلوبیت مستقیم

نکته: اگر در تابع مخارج مصرف‌کننده به جای سطح مطلوبیت، تابع مطلوبیت غیر مستقیم مصرف‌کننده را قرار دهیم، درآمد مصرف‌کننده بدست خواهد آمد.

مثال ۳۸: در مثال بالا با جاگذاری مطلوبیت غیر مستقیم در تابع مخارج مصرف‌کننده خواهیم داشت:

$$C = 2\sqrt{p_1 p_2 \bar{u}} \Rightarrow 2\sqrt{p_1 p_2 \frac{m^2}{4p_1 p_2}} = m$$

نکته: اگر در تابع تقاضای جبران شده به جای سطح مطلوبیت، تابع مطلوبیت غیر مستقیم را قرار دهیم، تابع تقاضای معمولی بدست می‌آید.

مثال ۳۹: می‌دانیم که اگر تابع مطلوبیت مصرف‌کننده به صورت $u = x_1 x_2$ باشد، در این صورت توابع معمولی و جبرانی تقاضا برای کالای x_1 به صورت زیر خواهند بود:

$$x_1^{C.D} = \sqrt{\frac{p_2 \bar{u}}{p_1}} \qquad x_1^{N.D} = \frac{m}{2p_1}$$

حال اگر در تابع تقاضای جبرانی، مطلوبیت غیر مستقیم $u = \frac{m^2}{4p_1 p_2}$ را جاگذاری کنیم، خواهیم داشت:

$$x_1^{C.D} = \sqrt{\frac{p_2 \bar{u}}{p_1}} \Rightarrow \sqrt{\frac{p_2 \frac{m^2}{4p_1 p_2}}{p_1}} = \frac{m}{2p_1}$$ تابع تقاضای معمولی

نکته: اگر در تابع تقاضای معمولی بجای درآمد مصرف‌کننده، تابع مخارج مصرف‌کننده را جاگذاری کنیم، تابع تقاضای جبرانی مصرف‌کننده بدست می‌آید.

مثال ۴۰: اگر در تابع تقاضای $x_1 = \frac{m}{2p_1}$، تابع مخارج $c = 2\sqrt{p_1 p_2 \bar{u}}$ را جاگذاری کنیم، خواهیم داشت:

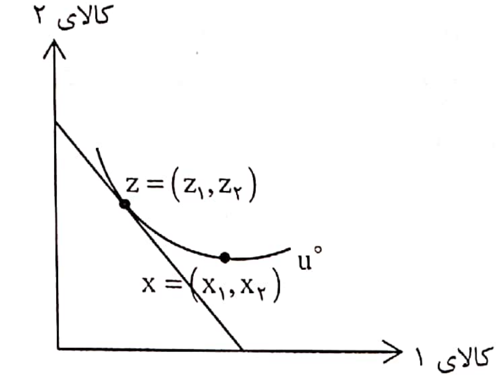
$$x_1^{N.D} = \frac{m}{2p_1} \Rightarrow \frac{2\sqrt{p_1 p_2 \bar{u}}}{2p_1} = \sqrt{\frac{p_2 \bar{u}}{p_1}}$$ تابع تقاضای جبرانی

۱۰- توابع مطلوبیت متری پول

تابع مطلوبیت مستقیم متری پول[1]، حداقل مخارج ضروری در سطح مشخصی از قیمتها را برای دستیابی به سطح مطلوبیتی برابر با میزان مطلوبیتی که سبد $x = (x_1, x_2)$ برای مصرف‌کننده ایجاد می‌کند را نشان می‌دهد. همانطور که از نمودار زیر ملاحظه می‌گردد، سبد کالایی $x = (x_1, x_2)$ مطلوبیتی به میزان u° را ایجاد می‌کند. از طرف دیگر حداقل

1 - Direct money metric utility function

مخارج لازم برای دسترسی به سطح مطلوبیت u°، برابر خط بودجه‌ای است که در نقطه $z=(z_1,z_2)$ بر منحنی بی‌تفاوتی u° مماس شده است. به صورت ریاضی این مسئله را می‌توان به صورت زیر حل نمود:



$$\begin{aligned} \min \quad & p_1 z_1 + p_2 z_2 \\ \text{s.t}: \quad & u(z_1,z_2) \geq u(x_1,x_2) \end{aligned}$$

نکته: اگر در تابع مخارج مصرف‌کننده به جای سطح مطلوبیت u، تابع مطلوبیت مستقیم مصرف‌کننده را قرار دهیم، تابع مطلوبیت مستقیم متری پول به دست می‌آید. به عبارت دیگر:

$$m(p_1,p_2,x_1,x_2)=c(p_1,p_2,u(x_1,x_2))$$

تابع مطلوبیت غیرمستقیم متری پول[1] نیز، بیانگر مقدار پولی است که مصرف‌کننده در سطح قیمتهای p_1 و p_2 نیاز دارد تا به همان صورتی آسوده خاطر شود که در مواجهه با قیمتهای h_1 و h_2 و با داشتن درآمد m می‌شود.

نکته: اگر در تابع مخارج مصرف‌کننده، به‌جای سطح مطلوبیت (u)، مقدار تابع مطلوبیت غیرمستقیم را به‌ازای قیمتهای h_1 و h_2 قرار دهیم، تابع مطلوبیت غیرمستقیم متری پول بدست می‌آید. به عبارت دیگر:

$$\mu(p_1,p_2,h_1,h_2,m)=c(p_1,p_2,v(h_1,h_2,m))$$

مثال ۴۱: اگر تابع مطلوبیت مصرف‌کننده به صورت $u=x_1x_2$ باشد. اولاً: تابع مطلوبیت غیرمستقیم و نیز تابع مخارج مصرف‌کننده را بدست آورید. ثانیاً: تابع مطلوبیت مستقیم متری پول و نیز تابع مطلوبیت غیرمستقیم متری پول را بدست آورید.

حل: اولاً: همانطور که قبلاً نیز اشاره شده است، در مورد این تابع مطلوبیت، توابع مخارج مصرف‌کننده و مطلوبیت غیرمستقیم به صورت زیر خواهند بود:

$$C=2\sqrt{p_1p_2u} \qquad v=\frac{m^2}{4p_1p_2}$$

---

1 - Indirect money metric utility function

ثانیاً:

تابع مطلوبیت مستقیم متری پول $\Leftarrow$

$$m(p_1,p_2,x_1,x_2)=C(p_1,p_2,u(x_1,x_2))\Rightarrow m(p_1,p_2,x_1,x_2)=2\sqrt{p_1p_2x_1x_2}$$

تابع مطلوبیت غیرمستقیم متری پول $\Leftarrow$

$$\mu(p_1,p_2,h_1,h_2,m)=C(p_1,p_2,v(h_1,h_2,m))\Rightarrow$$

$$\mu(p_1,p_2,h_1,h_2,m)=2\sqrt{p_1p_2\frac{m^2}{4h_1h_2}}=m\sqrt{\frac{p_1p_2}{h_1h_2}}$$